

Conf. univ. dr. Birou Marius

Ecuatii și inecuații I

29. Mulțimea soluțiilor inecuației

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) \geq 1 \text{ este : ...}$$

Soluție. Condiții:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \log_3 x > 0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) \geq 1 &\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 x \leq \frac{1}{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} \\ &\Rightarrow x \leq 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \end{aligned} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow x \in (1, \sqrt[3]{3}]$.

Răspuns corect: C.

131. Mulțimea soluțiilor inecuației

$$\log_x(1+x) + \log_{x^2}(1+x) + \log_{x^4}(1+x) \geq \frac{7}{4} \text{ este : ...}$$

Soluție.

Condiții:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+x > 0 \\ x, x^2, x^4 > 0 \\ x, x^2, x^4 \neq 1 \end{array} \right. \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$$

Avem

$$\log_{x^2}(1+x) = \frac{\log_x(1+x)}{\log_x x^2} = \frac{\log_x(1+x)}{2}$$

$$\log_{x^4}(1+x) = \frac{\log_x(1+x)}{\log_x x^4} = \frac{\log_x(1+x)}{4}$$

Rezultă

$$\log_x(1+x) + \frac{\log_x(1+x)}{2} + \frac{\log_x(1+x)}{4} \geq \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \log_x(1+x) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \geq \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \log_x(1+x) \geq 1$$

Cazuri:

I. $x \in (0, 1)$

$$\log_x(1+x) \geq 1 \Rightarrow \log_x(1+x) \geq \log_x x \Rightarrow 1+x \leq x \Rightarrow 1 \leq 0(F) \Rightarrow S_1 = \emptyset$$

II. $x \in (1, \infty)$

$$\log_x(1+x) \geq 1 \Rightarrow \log_x(1+x) \geq \log_x x \Rightarrow 1+x \geq x \Rightarrow 1 \geq 0(A) \\ \Rightarrow S_2 = (1, \infty)$$

Deci

$$S = S_1 \cup S_2 = (1, \infty)$$

Răspuns corect: B.

95. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1 \text{ este : ...}$$

Soluție. Condiții:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x+2-4\sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow x-2-4\sqrt{x-2}+4 = (\sqrt{x-2}-2)^2 \geq 0(A) \\ x+7-6\sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow x-2-6\sqrt{x-2}+9 = (\sqrt{x-2}-3)^2 \geq 0(A) \end{cases}$$

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}-3)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}-2| + |\sqrt{x-2}-3| = 1$$

Notăm

$$\sqrt{x-2} = y \geq 0 \Rightarrow |y-2| + |y-3| = 1$$

y	0	2	3	$+\infty$						
$y-2$	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$y-3$	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+

Cazuri:

I. $y \in [0, 2) \Rightarrow 2-y+3-y=1 \Rightarrow -2y=-4 \Rightarrow y=2 \notin [0, 2)$

II. $y \in [2, 3) \Rightarrow y-2+3-y=1 \Rightarrow 1=1(A) \Rightarrow y \in [2, 3)$

III. $y \in [3, \infty) \Rightarrow y-2+y-3=1 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=3 \in [3, \infty)$

I+II+III $\Rightarrow y \in [2, 3] \Rightarrow 2 \leq y \leq 3 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x-2} \leq 3 \Rightarrow 4 \leq x-2 \leq 9 \Rightarrow 6 \leq x \leq 11$

Răspuns corect: D.

110. Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+4x+4} = 2x \text{ este : ...}$$

Soluție. Condiții:

$$\begin{cases} x^2-4x+4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \geq 0(A) \\ x^2+4x+4 \geq 0 \Rightarrow (x+2)^2 \geq 0(A) \\ \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+4x+4} \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 2x \\
& \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = 2x \\
& \Leftrightarrow |x-2| + |x+2| = 2x
\end{aligned}$$

x	0	2	$+\infty$
$x-2$	- - - -	0	+
$x+2$	+	+	+

Cazuri:

I. $x \in [0, 2) \Rightarrow -x + 2 + x + 2 = 2x \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \notin [0, 2) \Rightarrow S_1 = \emptyset$

II. $x \in [2, \infty) \Rightarrow x - 2 + x + 2 = 2x \Rightarrow 2x = 2x(A) \Rightarrow S_2 = [2, \infty)$

$S = S_1 \cup S_2 = [2, \infty)$

Răspuns corect: C.

111. Soluția ecuației

$$(3 - 2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2} - 1)^x = 3 \text{ este : ...}$$

Soluție.

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2} - 1)^{2x} - 2(\sqrt{2} - 1)^x = 3$$

Notăm

$$(\sqrt{2} - 1)^x = t > 0$$

$$t^2 - 2t = 3 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = -1$$

$$t_1 = 3 \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^x = 3 \Rightarrow \log_3 (\sqrt{2} - 1)^x = \log_3 3$$

$$\Rightarrow x \log_3 (\sqrt{2} - 1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log_3 (\sqrt{2} - 1)}$$

$$t_2 = -1 < 0 \text{ nu convine}$$

Răspuns corect: E.

112. Soluția ecuației

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x = 1 \text{ este : ...}$$

Soluție.

Fie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x - 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^x \ln \frac{1}{6} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^x \ln \frac{\sqrt{2}}{6} < 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ este strict descrescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă.

Avem

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) - 1 = 0 \\ f &\text{ injectivă} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$x=1$ este singura soluție a ecuației.

Răspuns corect: B.

113. Ecuația

$$\left(5 + \sqrt{24}\right)^{\sqrt{x+1}} + \left(5 - \sqrt{24}\right)^{\sqrt{x+1}} = 98$$

are mulțimea soluțiilor: ...

Soluție.

Condiție: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

Avem

$$\left(5 + \sqrt{24}\right) \left(5 - \sqrt{24}\right) = 25 - 24 = 1 \Rightarrow 5 - \sqrt{24} = \frac{1}{5 + \sqrt{24}}$$

Notăm

$$\left(5 + \sqrt{24}\right)^{\sqrt{x+1}} = t > 0$$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{t} = 98 \Rightarrow t^2 - 98t + 1 = 0$$

$$\Delta = 98^2 - 4 = (98 - 2)(98 + 2) = 96 \cdot 100 = 6 \cdot 4^2 \cdot 10^2$$

$$t_{1,2} = \frac{98 \pm 40\sqrt{6}}{2} = 49 \pm 20\sqrt{6} = \left(5 \pm \sqrt{24}\right)^2$$

$$49 \pm 20\sqrt{6} = 24 + 25 \pm 2 \cdot 5\sqrt{24} = \left(5 \pm \sqrt{24}\right)^2$$

Cazuri:

I

$$t = t_1 \Rightarrow \left(5 + \sqrt{24}\right)^{\sqrt{x+1}} = \left(5 + \sqrt{24}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x + 1 = 4$$

$$\Rightarrow x = 3$$

II

$$t = t_2 \Rightarrow \left(5 + \sqrt{24}\right)^{\sqrt{x+1}} = \left(5 - \sqrt{24}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(5 + \sqrt{24}\right)^{\sqrt{x+1}} = \left(5 + \sqrt{24}\right)^{-2} \Rightarrow \sqrt{x+1} = -2 \text{ fals}$$

Răspuns corect: A.

121. Mulțimea soluțiilor ecuației

$$\log_3 x^2 - 2 \log_{-x} 9 = 2 \text{ este } \dots$$

Soluție

Condiții:

$$\begin{cases} -x > 0 \Rightarrow x < 0 \\ -x \neq 1 \Rightarrow x \neq -1 \\ x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

Avem

$$\log_3 x^2 = \log_3 (-x)^2 = 2 \log_3 (-x)$$

$$\log_{-x} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 (-x)} = \frac{2}{\log_3 (-x)}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad a, b, c > 0, \quad a, c \neq 1$$

Notăm

$$\log_3 (-x) = t \neq 0$$

$$2t - \frac{4}{t} = 2 \Rightarrow t - \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = -1$$

$$t = t_1 \Rightarrow \log_3 (-x) = 2 \Rightarrow \log_3 (-x) = \log_3 9 \Rightarrow -x = 9 \Rightarrow x = -9$$

$$t = t_2 \Rightarrow \log_3 (-x) = -1 \Rightarrow \log_3 (-x) = \log_3 \frac{1}{3} \Rightarrow -x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Răspuns corect: E.

127. Valoarea expresiei

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \text{ este } : \dots$$

Soluție.

Folosim formula

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Notăm

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = t$$

$$\Rightarrow t^3 = \sqrt{5}+2 - (\sqrt{5}-2) - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \cdot t$$

$$\Rightarrow t^3 = 4 - 3t \Rightarrow t^3 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-1)(t^2+t+4) = 0$$

Deoarece

$$t^2 + t + 4 \neq 0 (\Delta < 0) \Rightarrow t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Deci

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$$

Răspuns corect: A.

130. Știind că a este rădăcina reală a ecuației $x^3 + x + 1 = 0$ să se calculeze

$$\sqrt[3]{(3a^2 - 2a + 2)(3a^2 + 2a)} + a^2.$$

Soluție.

Avem

$$a^3 + a + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2a + 2 &= 3a^2 - 2a + 2 - 0 = 3a^2 - 2a + 2 - (a^3 + a + 1) \\ &= 1 - 3a + 3a^2 - a^3 = (1 - a)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2a &= 3a^2 + 2a + 0 = 3a^2 + 2a + a^3 + a + 1 \\ &= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (1 + a)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(3a^2 - 2a + 2)(3a^2 + 2a)} + a^2 &= \sqrt[3]{(1 - a)^3(1 + a)^3} + a^2 \\ &= (1 - a)(1 + a) + a^2 = 1 - a^2 + a^2 = 1 \end{aligned}$$

Răspuns corect: B.

99. Câte soluții întregi are ecuația

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0?$$

Soluție. Notăm

$$2^x = t > 0.$$

Se obține

$$8\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 54\left(t + \frac{1}{t}\right) + 101 = 0$$

Notăm

$$t + \frac{1}{t} = u > 0 \Rightarrow u^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = u^2 - 2$$

Rezultă

$$8(u^2 - 2) - 54u + 101 = 0 \Rightarrow 8u^2 - 54u + 85 = 0$$

$$\Delta = (-54)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85 = 2916 - 2720 = 196$$

$$u_{1,2} = \frac{54 \pm 14}{16} \Rightarrow u_1 = \frac{68}{16} = \frac{17}{4}; u_2 = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$$

Cazuri:

I

$$u_1 = \frac{17}{4} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{17}{4} \Rightarrow 4t^2 - 17t + 4 = 0$$

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 289 - 64 = 225$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{8}$$

$$t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$t = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = 2^{-2} \Rightarrow x = -2$$

II

$$u_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$$

Mulțimea soluțiilor este

$$S = \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow 4 \text{ soluții întregi}$$

Răspuns corect: B.

215. Mulțimea valorilor $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\log_a(x^2 + 4) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ este ...

Soluție. Condiții: $a > 0, a \neq 1$.

Cazuri:

I $a \in (0, 1)$

$$\log_a(x^2 + 4) \geq 2 \Leftrightarrow \log_a(x^2 + 4) \geq \log_a a^2 \Leftrightarrow x^2 + 4 \leq a^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x = a \Rightarrow a^2 + 4 \leq a^2 \Rightarrow 4 \leq 0(F)$$

II $a \in (1, \infty)$

$$\log_a(x^2 + 4) \geq 2 \Leftrightarrow \log_a(x^2 + 4) \geq \log_a a^2 \Leftrightarrow x^2 + 4 \geq a^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 4 \geq 4, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \leq 4 \Rightarrow a \in [-2, 2], a \in (1, \infty) \Rightarrow a \in (1, 2]$$

Răspuns corect: A.

24.

$$\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$$

Soluție. Condiții:

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x \neq 1 \\ 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

Avem

$$\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = \log_{1+x}(1+x)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$$

x_1, x_2 nu verifică condițiile $\Rightarrow S = \{3\}$.

Răspuns corect: C.

2.

$$x(1 - \lg 5) = \lg(2^x + x - 1)$$

Soluție. Condiție:

$$2^x + x - 1 > 0$$

Avem

$$x - x \lg 5 = \lg(2^x + x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \lg 10^x - \lg 5^x = \lg(2^x + x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \lg 2^x = \lg(2^x + x - 1) \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ verifică condiția $\Rightarrow S = \{1\}$.

Răspuns corect: C.