PREGĂTIRE ADMITERE 2021

PROBLEME GEOMETRIE ANALITICĂ

I I

03.04.2021

555 Dreapta care trece prin $C(1,2)$, neparalelă cu AB, față de care punctele $A(-1,1)$ și $B(5,-3)$ sunt egal depărtate are ecuația:

Soluție

Determinăm ecuația dreptei AB : $\frac{x+1}{6}=\frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow (AB): 2x+3y-1=0$

Fie dreapta $(\delta): Ax+By+C=0$, dreapta față de care punctele $A(-1,1)$ și $B(5,-3)$ trebuie să fie egal depărtate.

Dar $(\delta) \nparallel (AB) \Leftrightarrow \frac{A}{2} \neq \frac{B}{3} \Leftrightarrow 3A \neq 2B$.

$d((\delta), A(-1,1)) = \frac{|-A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $d((\delta), B(5,-3)) = \frac{|5A-3B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

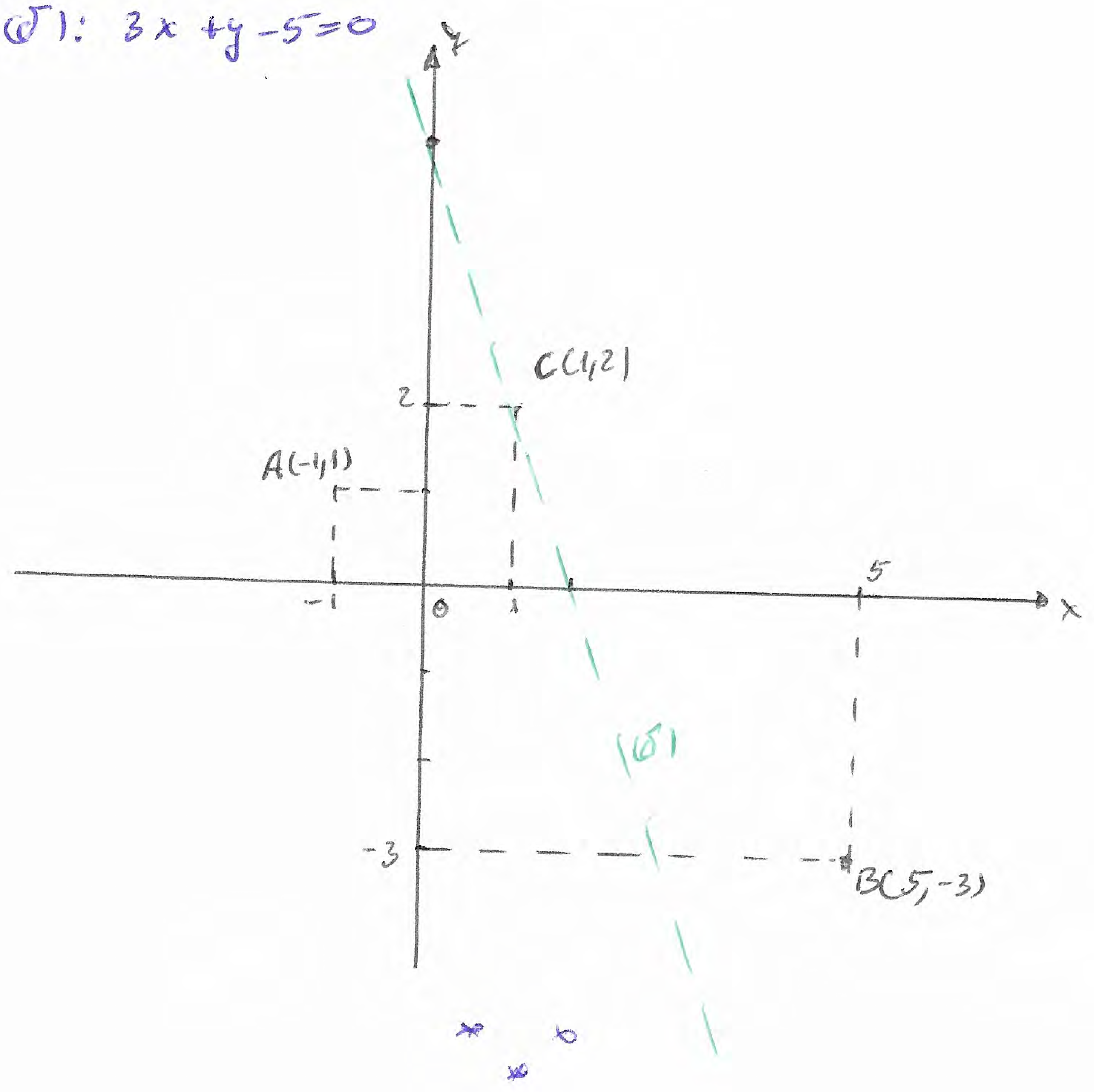
$$\Rightarrow \quad |-A+B+C| = |5A-3B+C|$$
$$-A+B+C = -5A+3B-C \Leftrightarrow$$
$$4A-2B+2C=0 \Leftrightarrow 2A-B+C=0.$$

Dar $C(1,2) \in (\delta) \Rightarrow A+2B+C=0$.

Cu urmare $\begin{cases} 2A-B+C=0 \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow A-3B=0 \Rightarrow A=3B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (\delta)\ 3x+y+C=0 \\ C(1,2)\in(\delta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3+2+C=0 \Rightarrow C=-5.$$

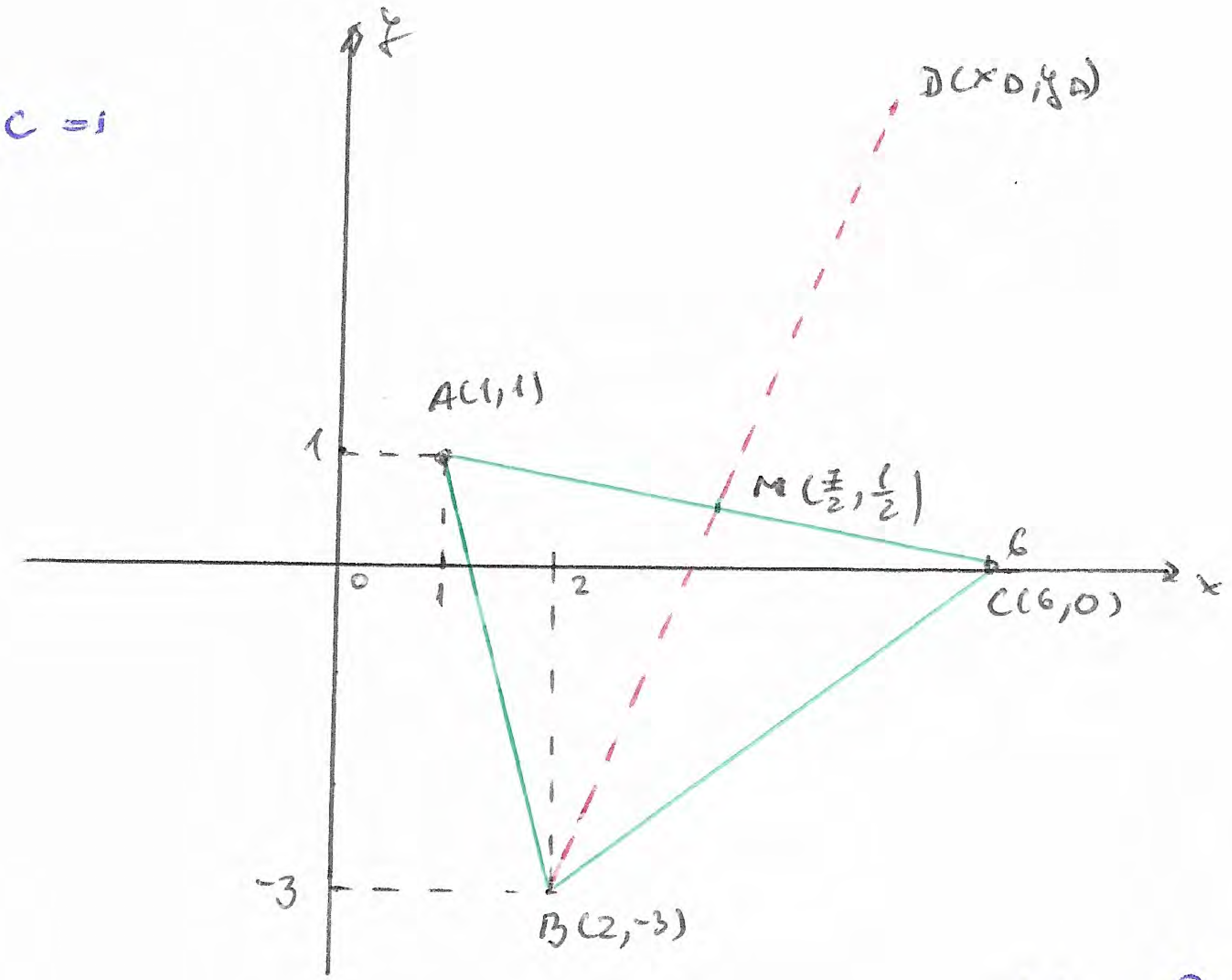
Deci (δ): $3x+y-5=0$



556 Fie punctele $A(1,1), B(2,-3), C(6,0)$. Coordonatele punctului D pentru care $ABCD$ este paralelogram sunt:

Soluție

Fie M - mijl. lui AC $\Rightarrow$
$\Rightarrow M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



Cum într-un paralelogram punctul de intersecție al diagonalelor înjumătățește diagonalele $\Rightarrow M$ - mijl. lui BD $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = \frac{2 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 5 \qquad \Rightarrow D(5,4)$$

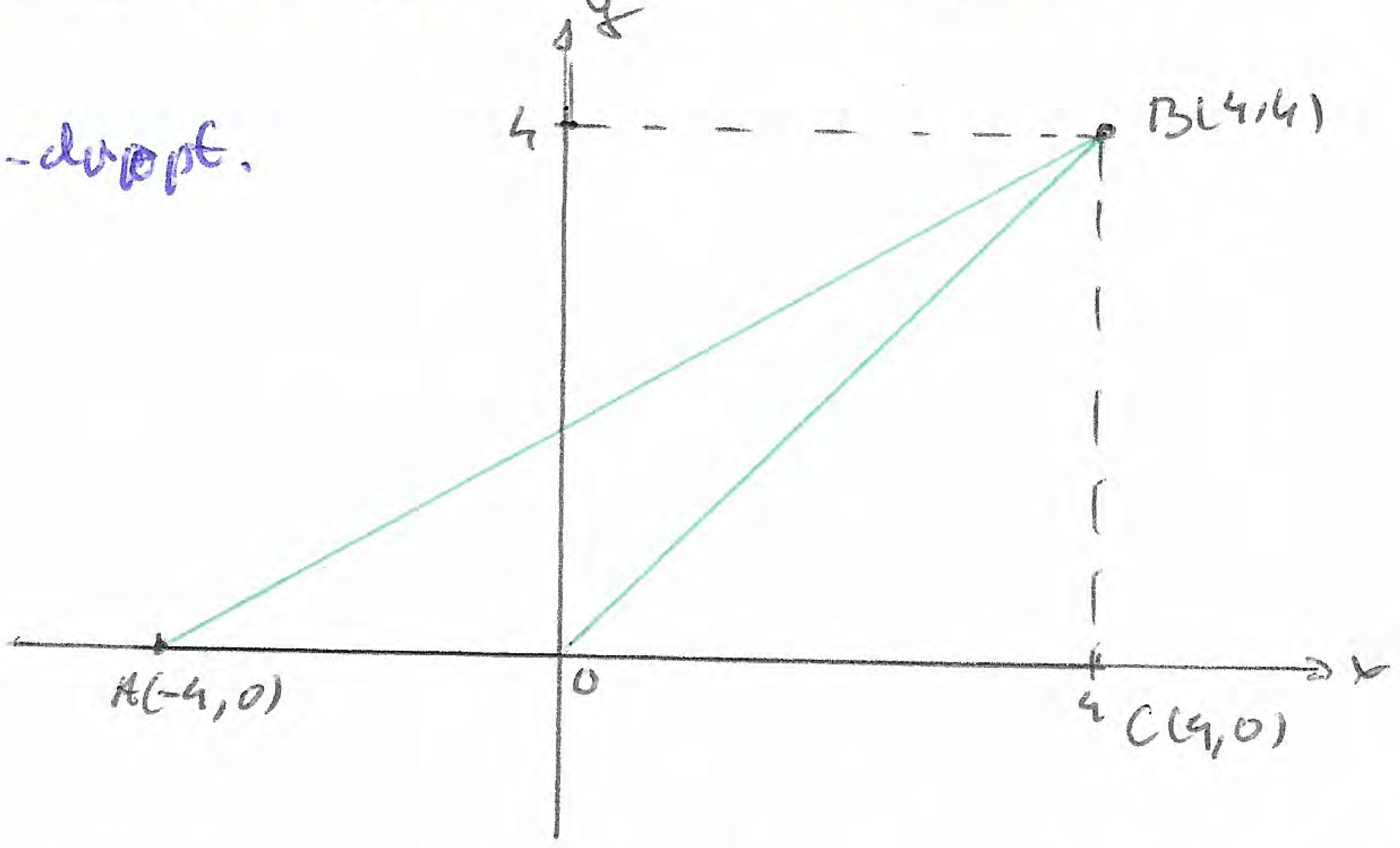
$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-3 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 4$$

* * *

557 Raza cercului care trece prin punctele $A(-4,0), B(4,4), O(0,0)$ este:

Soluție

Fie $C(4,0)$. Avem că ΔACB - dr.pt.



$\Rightarrow \sin A = \frac{|BC|}{|AB|}$

Dar $|BC| = 4$; ~~$|AB| = \sqrt{8^2}$~~

$|AB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}$.

$\Rightarrow \sin A = \frac{4}{2\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{20}}$

Avem că $|OB| = 4\sqrt{2}$.

Din teorema sinusului avem $\frac{|OB|}{\sin A} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris ΔAOB. $\Rightarrow$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{20}}} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{2}\cdot\sqrt{20} = 2\sqrt{10}$$

* * *

558 Laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC au respectiv ecuațiile:

$x+21y-22=0$; $5x-12y+7=0$; $4x-33y+146=0$.

Distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la latura BC este:

Soluție

Determinăm coordonatele vârfurilor triunghiului ABC rezolvând sistemele

$A: \begin{cases} x+21y=22 \\ 4x-33y=-146 \end{cases} \Rightarrow A(-20,2)$; $B: \begin{cases} x+21y=22 \\ 5x-12y=-7 \end{cases} \Rightarrow B(1,1)$

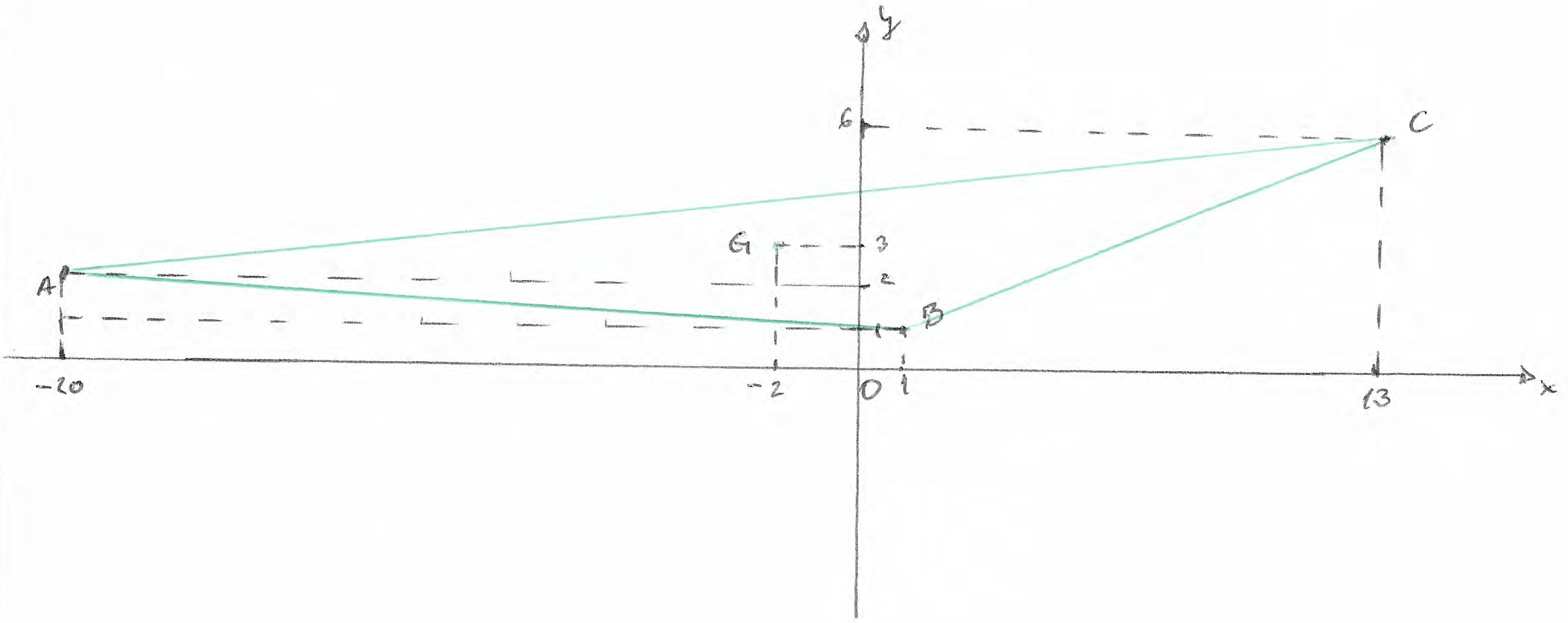
$C: \begin{cases} 5x-12y+7=0 \\ 4x-33y+146=0 \end{cases} \Rightarrow C(13,6)$

Dacă G este centrul de greutate al ΔABC. Atunci:

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \; ; \; y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{-20+1+13}{3} = -2 \; ; \; y_G = \frac{2+1+6}{3} = 3 \Rightarrow G(-2,3)$$

Atunci $d(G(-2,3);(BC)) = \frac{|-5\cdot 2-12\cdot 3+7|}{\sqrt{25+144}} = \frac{39}{13} = 3$

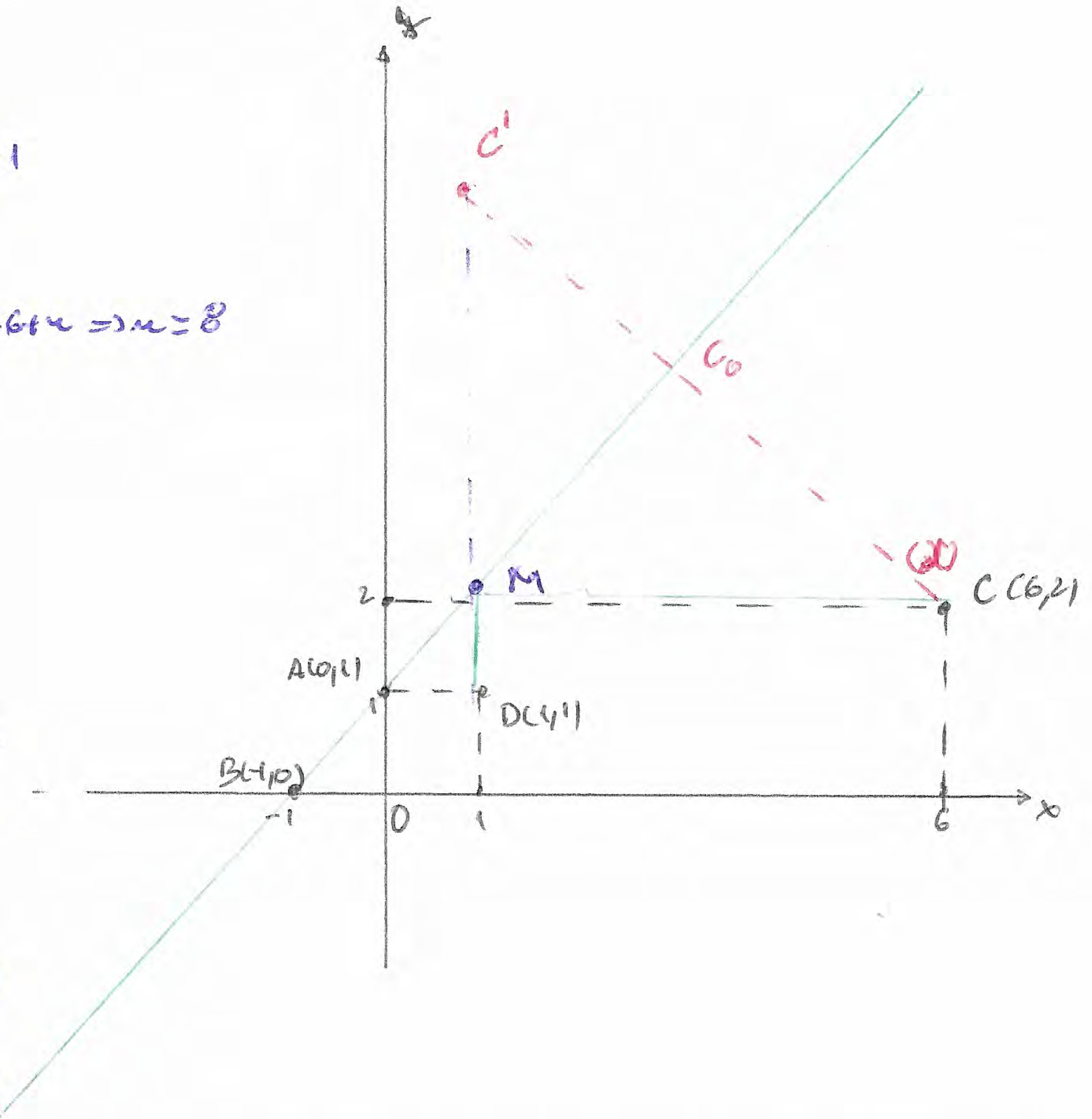


Se dau punctele $A(0,1)$, $B(-1,0)$, $C(6,2)$ și $D(1,1)$.

$\boxed{559}$ Simetricul punctului C față de dreapta AB este:

$\boxed{560}$ Coordonatele punctului $M \in AB$ pentru care suma $DM+MC$ este minimă sunt:

$\boxed{561}$ Coordonatele punctului $M \in AB$ pentru care suma DM^2+MC^2 este minimă sunt:



Soluție

Ecuația dreptei (AB): $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1$

$\Rightarrow (AB): y = x+1$

Fie $(d) \perp (AB) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(d): y=-x+n \\ C(6,2)\in(d)\end{array}\right\} \Rightarrow 2=-6+n \Rightarrow n=8$

$\Rightarrow (d): y=-x+8$.

Fie $C_0 = (d) \cap (AB)$

$C_0: \begin{cases} y = x+1 \\ y=-x+8 \end{cases} \Rightarrow C_0\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Dacă C' este simetricul lui C față de AB, atunci C_0 - mij. CC'

$x_{C_0} = \frac{x_C + x_{C'}}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = \frac{6+x_{C'}}{2} \Rightarrow x_{C'}=1$

$y_{C_0} = \frac{y_C + y_{C'}}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} = \frac{2+y_{C'}}{2} \Rightarrow y_{C'}=7$

$\Rightarrow \underline{C'(1,7)}$.

Cum $C'(1,7)$ este simetricul lui C față de AB $\Rightarrow |MC| = |MC'|$

$\Rightarrow CM+DM = C'M+DM$, această sumă va fi minimă când $M \in DC'$.

Ecuația lui DC' este $x=1$.

Cum $M \in (DC') \cap AB \Rightarrow M: \begin{cases} x=1 \\ y=x+1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{M(1,2)}}$

Dacă $M \in AB \Rightarrow M(x, x+1)$. Atunci $MD^2+MC^2 = (x-1)^2+x^2+(x-6)^2+(x-1)^2 =$

$= 4x^2-16x+38 = f(x)$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 8x-16=0 \Rightarrow x_{min}=2$, $\cancel{y_{min}=3}$. $y_{min}=3$.

$\Rightarrow \underline{\underline{M(2,3)}}$

* *
*

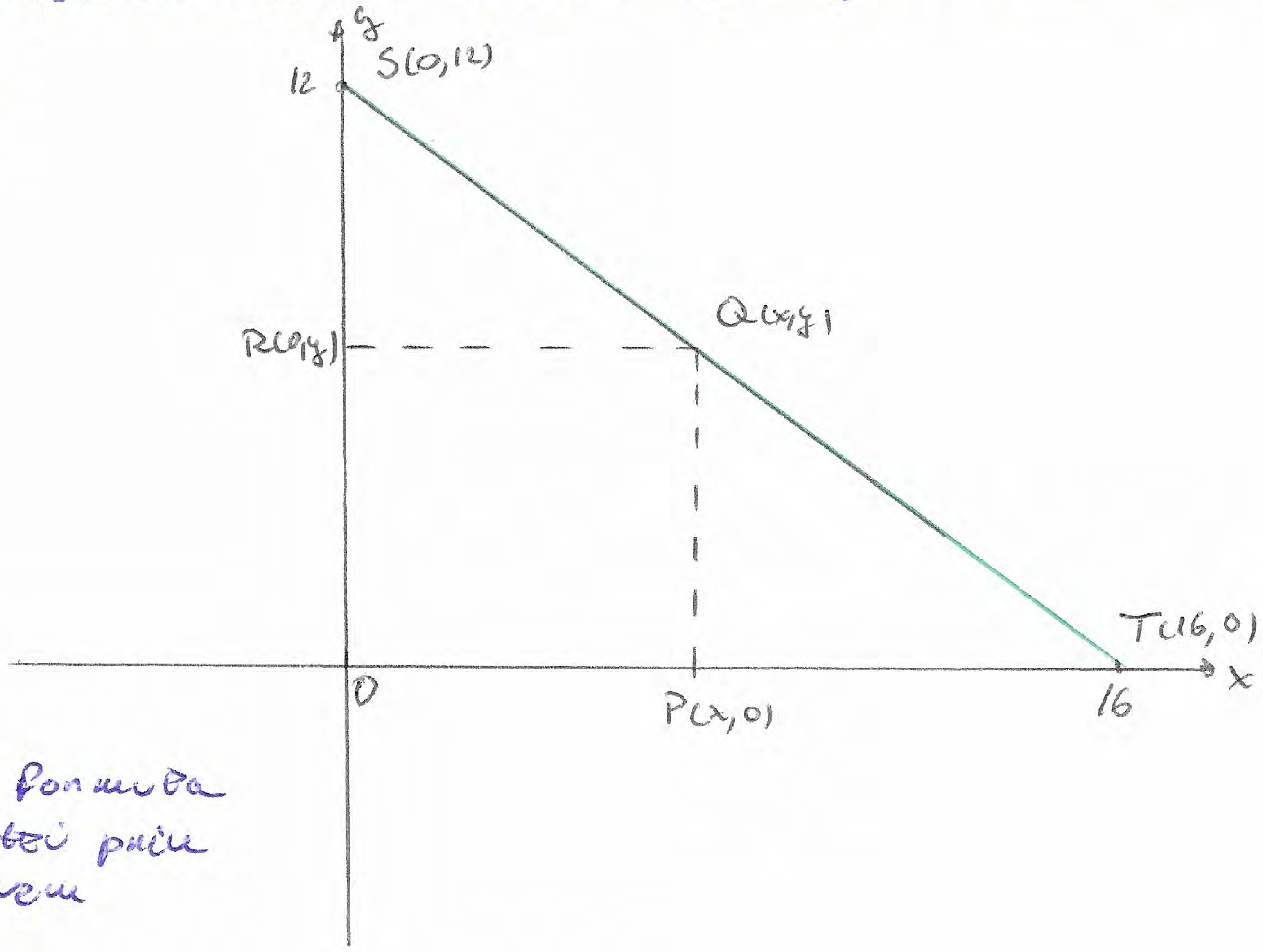
Se consideră în planul xOy punctele S(0,12), T(16,0) și Q(x,y) un punct variabil situat pe segmentul [ST]. Punctele P și R aparțin axelor de coordonate a.î. patrulaterul OPQR să fie dreptunghi.

$\boxed{562}$ Ecuația dreptei ST este:

$\boxed{563}$ Aria dreptunghiului OPQR este:

$\boxed{564}$ Valoarea maximă a ariei dreptunghiului OPQR este:

Soluție



Apelând la formula ecuației dreptei prin tăieturi, avem

$(ST): \frac{x}{16}+\frac{y}{12}=1 \Leftrightarrow (ST): 3x+4y-48=0$

Aria dreptunghiului OPQR este $\sigma_{OPQR}=|OP|\cdot|OR|=xy$

Dar cum $Q(x,y)\in(ST) \Rightarrow 3x+4y-48=0 \Rightarrow y=12-\frac{3}{4}x$

În urmare $\sigma_{OPQR}=x(12-\frac{3}{4}x)=12x-\frac{3}{4}x^2$.

Fie $\sigma(x)=-\frac{3}{4}x^2+12x \Rightarrow \sigma'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+12=0 \Rightarrow x_{max}=8$

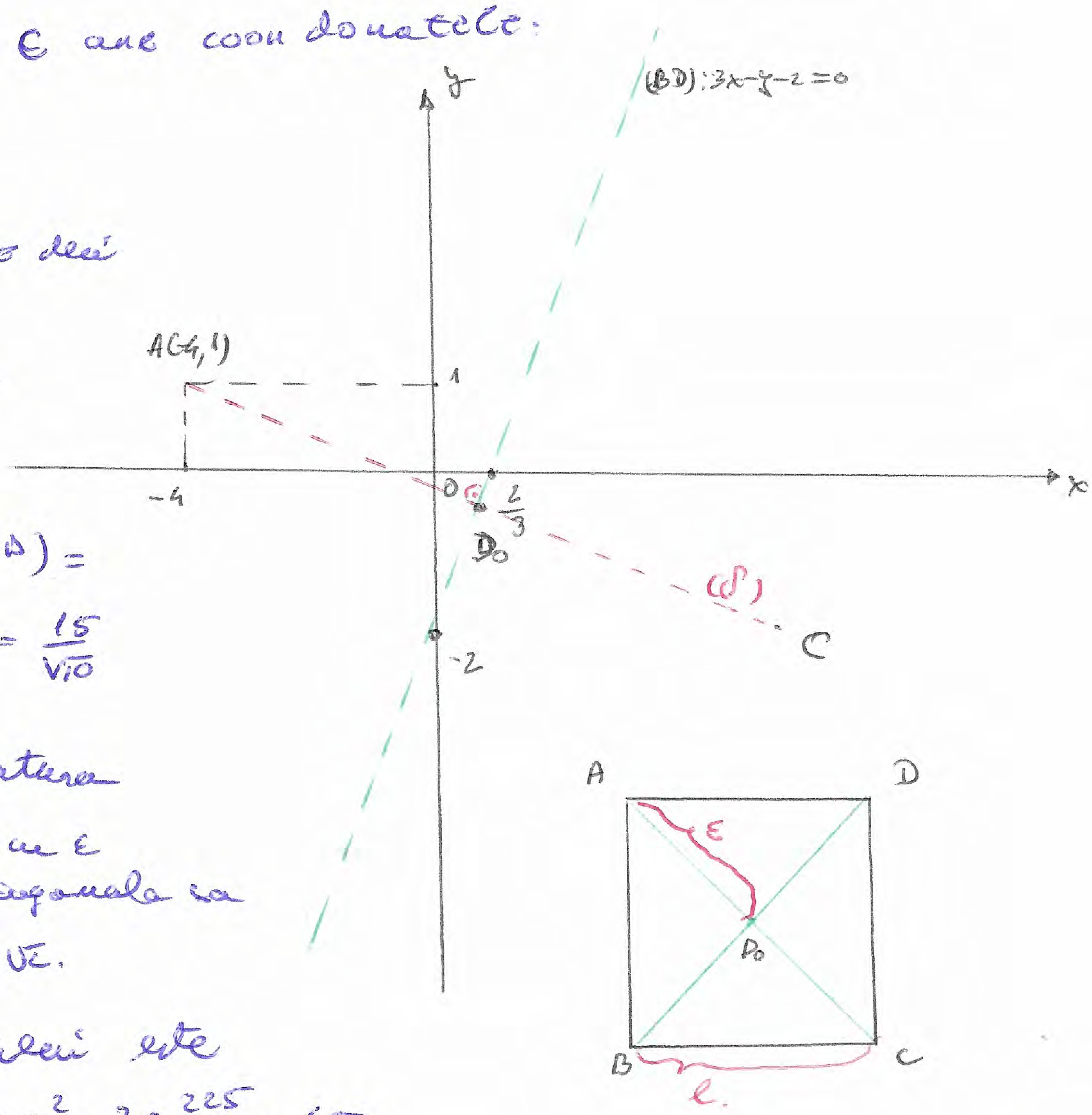
În urmare $\sigma_{max}=\sigma(8)=-\frac{3}{4}\cdot 64+12\cdot 8=-48+96=48$

* *
*

Punctul $A(-4,1)$ este un vârf al pătratului $ABCD$ parcurs în sens direct trigonometric, căruia i se cunoaște o diagonală de ecuație $3x-y-2=0$.

$\boxed{565}$ Aria pătratului $ABCD$ este:

$\boxed{566}$ Punctul C are coordonatele:



Soluție

Diagonala BD are deci ecuația

$(BD): 3x-y-2=0$ sau

$(BD): y=3x-2$

Fie $\varepsilon = d(A(-4,1), BD) =$

$$= \frac{|-4\cdot 3-1\cdot 1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{15}{\sqrt{10}}$$

Notând cu l latura pătratului și cu ε jumătate din diagonala sa avem că $l = \varepsilon\sqrt{2}$.

Deci Aria pătratului este

$$S = l^2 = (\varepsilon\sqrt{2})^2 = 2\varepsilon^2 = 2\cdot\frac{225}{10} = \underline{45}$$

Vârful C al pătratului este simetricul lui A față de (BD).

Fie $\left.\begin{array}{l}(\delta)\perp(BD) \Rightarrow (\delta): y=-\frac{1}{3}x+n\\ A(-4,1)\in(\delta)\end{array}\right\} \Rightarrow 1=\frac{4}{3}+n \Rightarrow n=-\frac{1}{3} \Rightarrow (\delta): y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

Fie $D_0=(\delta)\cap(BD) \Rightarrow D_0: \begin{cases} y=3x-2\\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow D_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Dar D_0 - mij AC $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_{D_0}=\dfrac{x_A+x_C}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}=\dfrac{-4+x_C}{2} \Rightarrow x_C=5\\ y_{D_0}=\dfrac{y_A+y_C}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}=\dfrac{1+y_C}{2} \Rightarrow y_C=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(5,-2)}$$

* * *

Fie în planul xOy punctele $A(4,0)$, $B(5,1)$, $C(1,5)$, $D(0,4)$.

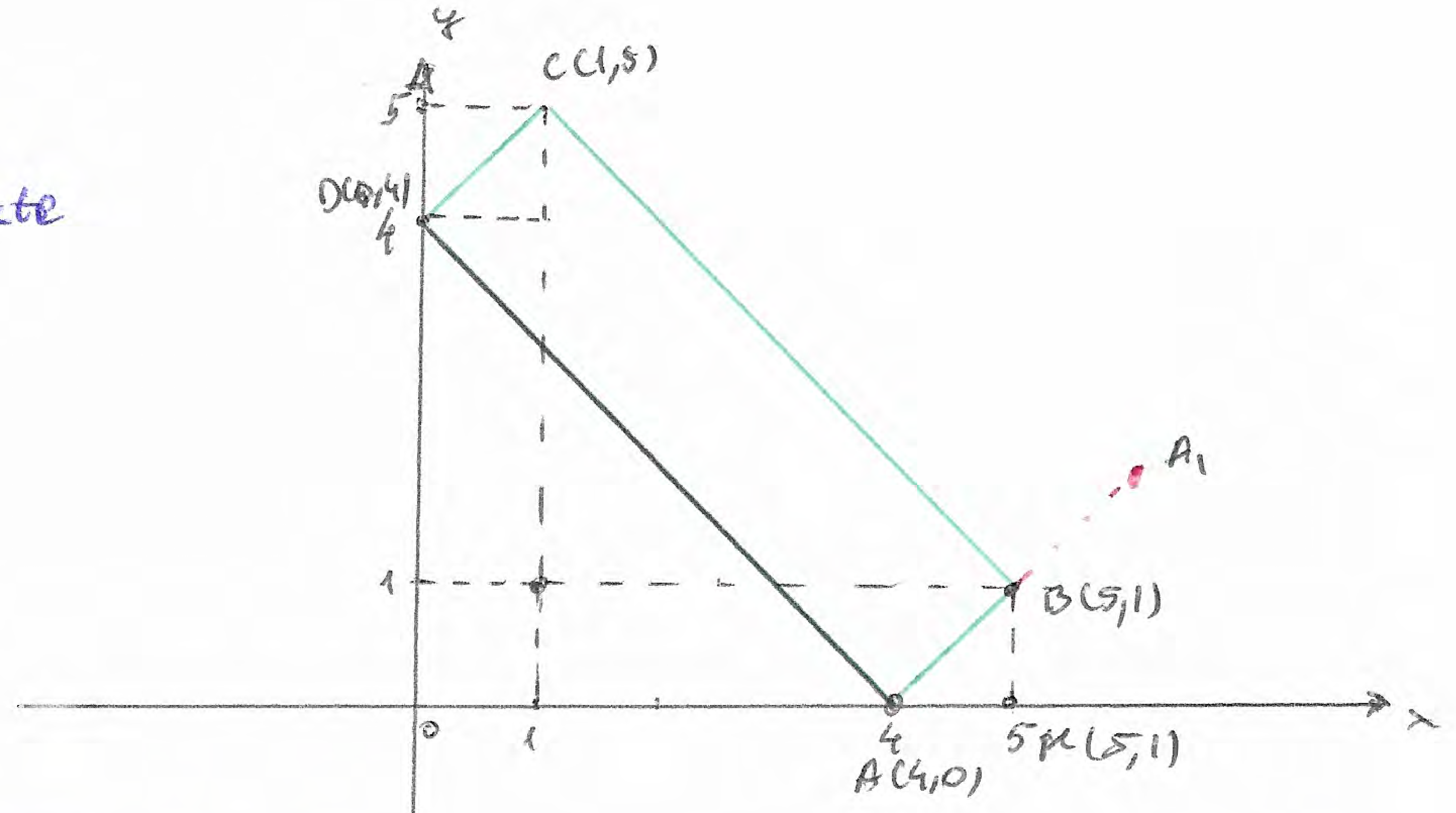
567 Patrulaterul ABCD este:

568 Aria patrulaterului ABCD este:

569 Simetricul punctului A față de dreapta BC este punctul de coordonate:

<u>Soluție</u>

Patrulaterul ABCD este dreptunghi.



Avem că $AB = \sqrt{AM^2+BM^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$AD = \sqrt{OA^2+OD^2} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$.

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{8}$

Fie A_1 - simetricul lui A față de B $\Rightarrow$ B - mijl AA_1

$$x_B = \frac{x_A + x_{A_1}}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{4 + x_{A_1}}{2} \Rightarrow x_{A_1} = 6$$

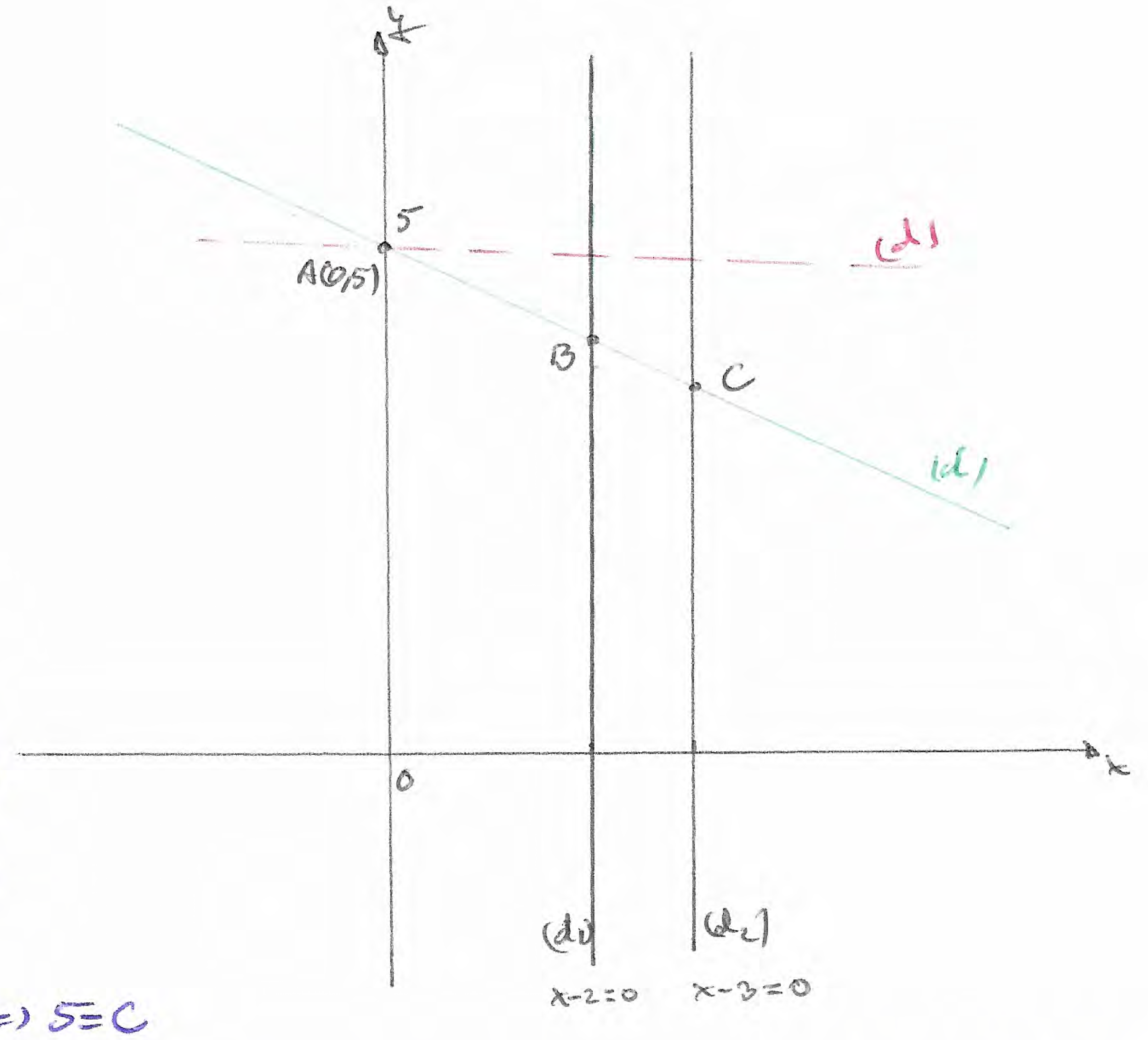
$$y_B = \frac{y_A + y_{A_1}}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{0 + y_{A_1}}{2} \Rightarrow y_{A_1} = 2$$

$\Rightarrow \underline{A_1(6,2)}$

* * *

570 În sistemul cartezian xOy, o dreaptă variabilă (d) care conține punctul $A(0,5)$ intersectează dreptele $(d_1): x-2=0$ și $(d_2) x-3=0$ în punctele B, respectiv C. Să se determine panta m a dreptei (d) a.î. segmentul BC să aibă lungimea minimă.

Soluție



$|BC|$ - minimă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2)\end{cases} \Leftrightarrow$

$(d) \perp (d_1): x-2=0$

$(d) \perp (d_2): x-3=0$

Cum $(d_1) \parallel (d_2) \parallel Oy$

$\Rightarrow (d) \parallel Ox \Rightarrow$

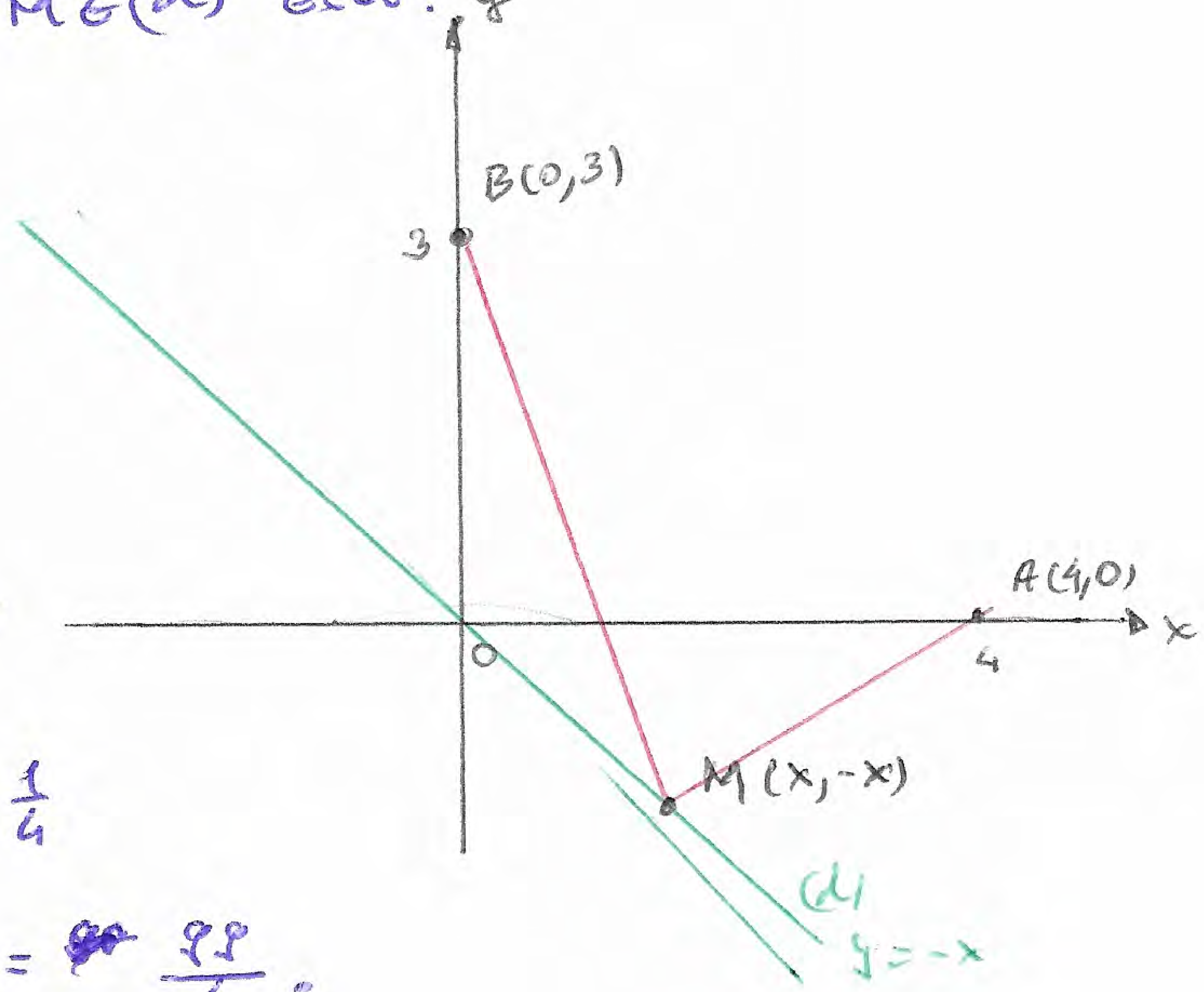
$\Rightarrow (d)\ y = c.$
$\left.\begin{matrix} \\ A(0,5) \in d\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5 = c$

$\Rightarrow (d): y = 5$ deci luând $(d)\ y = mx+n \Rightarrow (d)\ y = 0 \cdot x + 5 \Rightarrow \underline{\underline{m=0}}$

* * *

571 Fie dreapta $(d): x+y=0$ și punctele $A(4,0)$, $B(0,3)$. Valoarea minimă a sumei $MA^2 + MB^2$, pentru $M \in (d)$ este:

Soluție



Cum $M \in (d) \Rightarrow M(x, -x)$

Deci

$MA^2 = (x-4)^2 + x^2$

$MB^2 = x^2 + (x+3)^2$

Fie $f(x) = MA^2 + MB^2 = (x-4)^2 + x^2 + x^2 + (x+3)^2 =$

$= 4x^2 - 2x + 25$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 2 = 0 \Rightarrow x_{min} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f_{min} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 25 = 25 - \frac{1}{4} = \frac{99}{4}.$

* * *

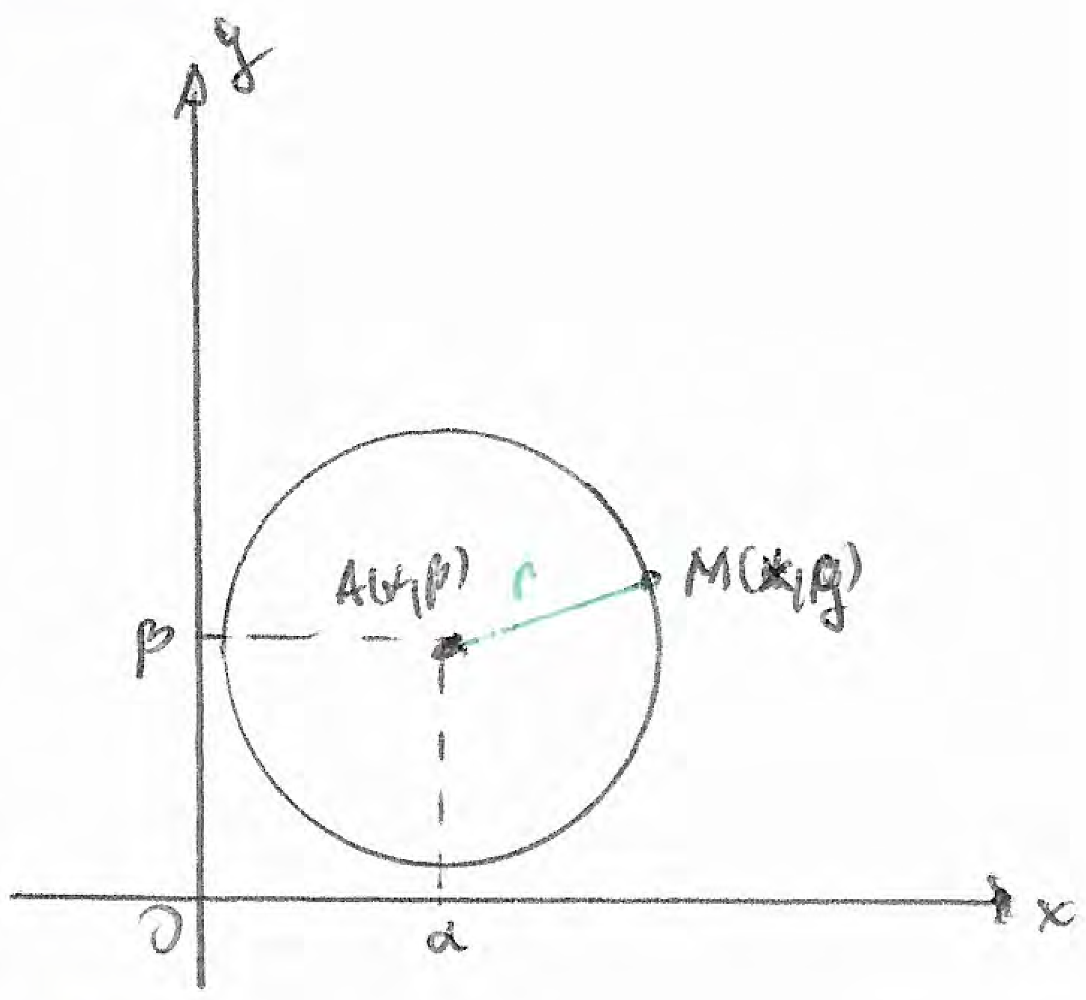
Se consideră expresia $E(x,y)=x^2+y^2-6x-10y$.

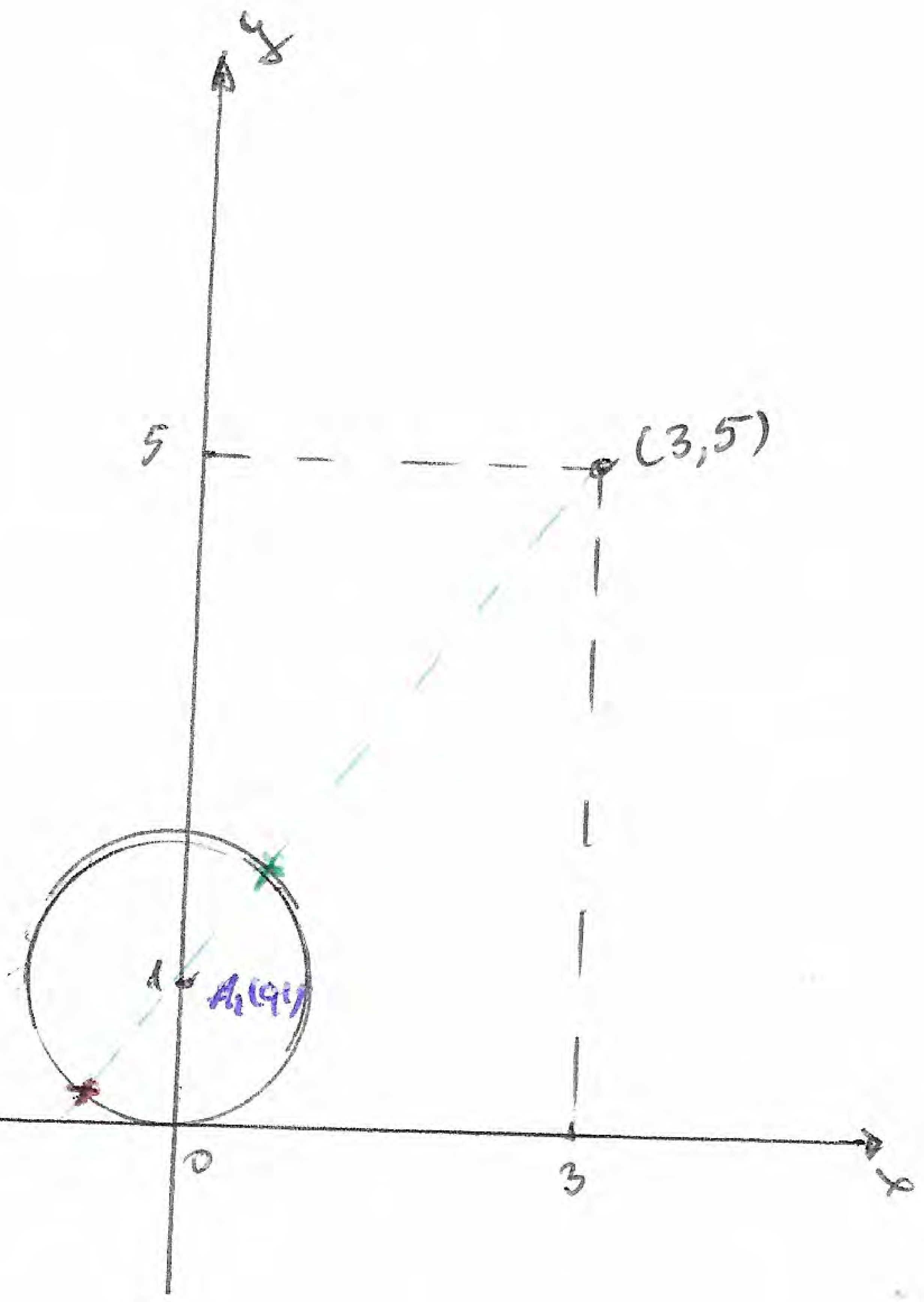
572 Distanța de la punctul (x,y) la punctul $(3,5)$ este:

573 Valoarea minimă a lui $E(x,y)\in\mathbb{R}^2$, este:

574 Se consideră mulțimea $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2y\le 0\}$. Valoarea minimă a lui $E(x,y)$, pentru $(x,y)\in D$ este:

Soluție





Avem că $d((x,y),(3,5))=$

$=\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=\sqrt{x^2+y^2-6x-10y+34}=$

$=\sqrt{E(x,y)+34}$

Avem că $E(x,y)=(x-3)^2+(y-5)^2-34$ – va fi minimă $\Leftrightarrow x-3=0$ și $y-5=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{min}=-34$

Să determinăm pt. început ec. cercului centrat în punctul $A(\alpha,\beta)$ și rază r.

Fie $M(x,y)$ un punct oarecare pe cerc, ținând cont de definiția cercului ca loc geometric avem

$$|MA|=r \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Leftrightarrow$$

$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$ care este ecuația generală a cercului centrat în $A(\alpha,\beta)$ și rază r.

Atunci $x^2+y^2-2y=0$ reprezintă cercul centrat în $A_1(0,1)$ și rază $r=1$

$-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$

$-2\beta=-2 \Rightarrow \beta=1$

$\alpha^2+\beta^2-r^2=0 \Rightarrow 0^2+1^2-r^2=0 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$

Domeniul D reprezentat de inecuația $x^2+y^2-2y\le 0$ – va fi constituit din toate punctele din plan situate în interiorul și pe cercul centrat în punctul $A(0,1)$ și rază $r=1$.

Domeniul D - poate în acest caz denumire de disc închis centrat în A(0,1) și rază $r=1$.

Expresia $E(x,y)$ va fi maximă când distanța de la punctul (3,5) la un punct din discul închis D va fi maximă.

Distanța va fi maximă când punctul se află în cadranul II și este intersecția dreptei ce trece prin punctele (3,5) și (0,1) cu cercul $x^2+y^2-2y=0$.

Ecuația dreptei ce trece prin punctele (3,5) și (0,1) este:

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+1.$$

Determinăm în continuare punctele de intersecție ale acestei drepte cu cercul $x^2+y^2-2y=0$

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x+1 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+\frac{16}{9}x^2+\frac{8}{3}x+1-\frac{8}{3}x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{3}{5} \\ y_1=\frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{3}{5} \\ y_2=\frac{9}{5} \end{cases}$$

Ca urmare punctul nostru este $\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$

$$\Rightarrow E_{max}=E\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)=\frac{9}{25}+\frac{1}{25}+\frac{18}{25}-2=\underline{2}$$

* * *