Probleme de numărare și probabilități

Note Title 3/5/2021

D. ROȘCA

PERMUTĂRI

- o aranjare a elementelor mulțimii $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$

  $\exists$ $n!$ permutări ale elem lui $\mathbb{N}_n$

  ex: $4\ 3\ 1\ 2\ 5$ = permutare a el. lui $\mathbb{N}_5$

  $\underset{5 \text{ moduri}}{\underline{\quad}}\ \underset{4 m}{\underline{\quad}}\ \underset{3 m}{\underline{\quad}}\ \underset{2 m}{\underline{\quad}}\ \underset{1 m}{\underline{\quad}}$

  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

- o funcție bijectivă : $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$

  ex: not $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ este funcția

  $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 3$

ARANJAMENTE

- selecții ordonate

Exemplu: Dacă o clasă are 25 elevi, în câte moduri se ~~poate~~ face premierea la sfârșitul anului, dacă se acordă un premiu I, un premiu II și un premiu III?

! contează ordinea

I → 25 moduri
II → 24 moduri
III → 23 moduri

Total: $25 \cdot 24 \cdot 23$ moduri $\overset{\text{not}}{=} A_{25}^{3}$

- funcții injective: $H_n \to H_m$

$n \leq m$ $\qquad f(1) \to m$ moduri

$f(2) \to m-1$ moduri

$\vdots$

$f(n) \to m-(n-1)$ moduri

Total: $m(m-1)\ldots(m-n+1) = A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

COMBINĂRI

- selecții neordonate

Exemplu: Dintr-o clasă de 25 elevi, în câte moduri se poate alege o echipă de 3 elevi, pentru a-i trimite într-o excursie în Harbolulu?

! nu contează ordinea

($\Leftrightarrow$ a extrage o submulțime de 3 elemente)

Sol.: Din cei 3 selectați anterior (în A_{25}^3 moduri), aceeași echipă de 3 elevi se obține permutându-i între ei în $3!$ moduri

ABC

CBA

...

Deci nr cerut este $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} \overset{not}{=} C_{25}^3$ $\binom{25}{3}$

C_m^n = nr de submulțimi de n elemente ale unei mulțimi de m elemente

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \, n!}$$

- funcții strict crescătoare: $N_n \to N_m$

$f(1) < f(2) < \dots < f(n) \Rightarrow$ distincte.

Alegem valorile pentru $f(1), \dots f(n)$ din $\mathbb{N}/_m$ în C_m^n moduri, apoi le aranjăm în ordine crescătoare (unic)

$$\mathbb{N}_4 \to \mathbb{N}/_7$$

- aleg 4 : 2 5 3 7 (C_7^4 moduri)
- ordonare : 2 3 5 7 (unic)
- atribuire $f(1) = 2, \ f(2) = 3, \ f(3) = 5, \ f(4) = 7$

Alte rezultate:

- nr de funcții : $\mathbb{N}/_n \to \mathbb{N}/_m$: m^n

$f(1) \to m$ moduri
$f(2) \to m$ moduri

$f(n) \to m$ moduri

Total: $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ ori}} = m^n$

- nr de submulțimi ale lui $\mathbb{N}_n$: 2^n

$\underline{n=6}$ $S = \{1, 3, 4\} \longleftrightarrow$ funcția $f : \mathbb{N}_n \to \{0, 1\}$

$$\underbrace{f(i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i \in S \\ 0 & \text{dacă } i \notin S \end{cases}}$$

$$S \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow f(i) \end{matrix}$$

$f(i)$ - 1 pe pozițiile 1, 3, 4

$\emptyset \leftarrow 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

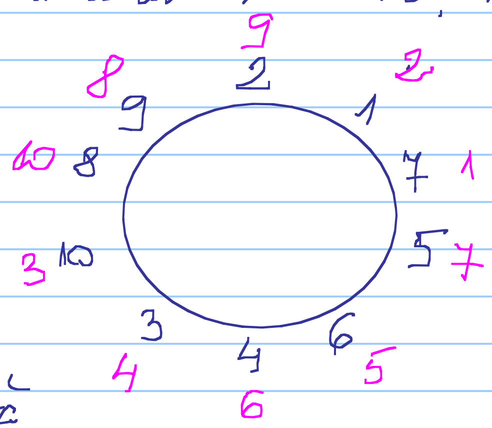
① Permutări circulare

În câte moduri se pot așeza la o masă circulară 10 persoane?

a) arbitrar

Sol: - aranjăm cele 10 persoane în șir indian în 10! moduri, apoi le punem la masă

ex: 2 1 7 5 6 4 3 10 8 9 →



masa privită de sus

- dar, aceeași configurație la masă o obținem dacă fiecare se deplasează cu o poziție spre stânga

(șirul 9 2 1 7 5 6 4 3 10 8 generează aceeași configurație la masă)

În total există 10 șiruri care generează aceeași configurație, deci am numărat de 10 ori mai mult, prin urmare vom împărți la 10. Deci $R: \frac{10!}{10} = 9!$

b) două persoane fixate vor să stea una lângă alta

A, B - persoanele. Vom considera ca AB este un element al șirului precedent (AB este "1 persoană")

$\underset{AB}{\_\_} \underbrace{\_\_ \ldots \_\_}_{8 \text{ poziții}}$

Restul pozițiilor din șir trebuie completate cu cele 8 persoane rămase

Deci analog $\frac{9!}{9} = 8!$ moduri în care avem AB (A stă la masă în dreapta lui B)

Analog, cu BA (A stă la masă la stânga lui B) avem tot 8! moduri

Final: $\underline{R}$: $2 \cdot 8!$

c) un copil vrea să stea între părinții lui

C copilul A, B părinții

$\underbrace{ACB}$ $\_\_\_\_\_\_$

$\underbrace{BCA}$ $\underbrace{\_\_\_\_\_\_}_{7}$

Pentru ACB considerat ca "persoană", rămân 7 ~~poziții~~ care trebuie ocupate cu celelalte 7 persoane

deci $\frac{8!}{8} = 7!$ cu ACB și tot $\frac{8!}{8}$ cu BCA

R $2 \cdot 7!$

(2) Câte submulțimi ale lui N_8 se pot construi astfel încât

a) Cel mai mic element al fiecărei submulțimi este 5

(~235)

$M = \{5, \underset{?}{\underset{4}{\ldots}}\}$

Problema se reduce la a construi o submulțime din $\{6, 7, 8\}$, lucru care se poate face în 2^3 moduri.

Elementele acestei submulțimi, adăugate la x1 vor alcătui o submulțime în care cel mai mic element va fi 5

R: 2^3

b) Cel mai mare element este 6

Analog, trebuie construită o submulțime a lui $\{1,2,3,4,5\}$

R: 2^5 moduri

c) Au 4 elemente, îl conțin pe 3 și nu le conțin pe 6 și pe 8

($\sim$ 234)

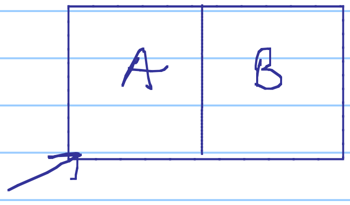
$\{3, \_, \_, \_\}$

3 este în submulțime, deci rămân de extras 3 elemente din mulțimea $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ și acest lucru se poate face în C_5^3 moduri

③ În câte moduri se poate scrie $\mathbb{N}_8$ ca reuniune de:

a) două mulțimi nevide, disjuncte?

<u>Sol 1</u>



$\mathbb{N}_8$

Problema se reduce la construcția lui A (în momentul în care A s-a construit, B va rezulta automat preluând restul de elemente care nu au fost puse în A)

ex: $A = \{2, 3, 5\}$ ales $\Rightarrow$ $B = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ automat

A se poate construi în $2^8 - 2$ moduri

(am scăzut 2 pentru că $\emptyset$ și $\mathbb{N}_8$ nu convin)

$A = \mathbb{N}_8 \Rightarrow B = \emptyset$

Dar aceeași reuniune am numărat-o de 2 ori

$A = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ ales, $B = \{2, 3, 5\}$ (automat)

este aceeași cu cea considerată mai sus

R $\quad \frac{2^8-2}{2} = 2^7-1$

Sol 2 : se poate obține direct 2^7-1 ?

Este suficient să alegem (precizăm) mulțimea care îl conține pe 1 (restul elementelor vor merge automat în cealaltă mulțime)

$\{1, \quad \}$. Mulțimea care îl conține pe 1 se poate alege în 2^7 moduri (nr submulțimi ale lui $\{2,3,4,5,6,7,8\}=M$ Dintre acestea se exclude M, pentru că ar rezulta $A=N_8$ deci $B=\emptyset$

Final R : $2^7 - \underbrace{1}_{M}$

b) 7 submulțimi nevide, disjuncte

Se observă că reuniunea va conține 6 mulțimi cu un element
și
o mulțime cu 2 elemente

=> problema se reduce la construirea mulțimii cu 2 elemente, restul elementelor vor forma (automat) singure, mulțime

ex $\{3,5\}$ aleasă => $\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$ automat

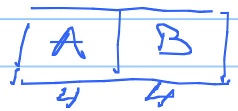
Mulțimea de 2 elemente se poate alege în C_8^2 moduri

Final $\underline{R}$: C_8^2

c) două submulțimi disjuncte cu număr egal de elemente

237

Sol 1



Din nou, problema se reduce la construcția lui A (B rezultă automat formând restul de 4 elemente)

A se poate construi în C_8^4 moduri

R $\frac{C_8^4}{2} = 35$ (ca la a) am numărat dublu, deci trebuie să împărțim cu 2)

$= C_7^3$

Sol 2 direct C_7^3 ?

Problema se reduce la construcția mulțimii care îl conține pe 1. Pentru aceasta, trebuie să mai alegem 3 elemente din $\{2,3,4,5,6,7,8\}$, ele putând fi alese în C_7^3 moduri

(4) Câte submulțimi ale lui N_8
(nr. 238)

a) nu conțin numere divizibile cu 3

<=> nu conțin pe 3 și nici pe 6

<=> conțin doar pe 1, 2, 4, 5, 7, 8, adică va trebui să alegem o submulțime a lui $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ și acest lucru se poate face în 2^6 moduri

Obs $\emptyset$ este numărată, ea îndeplinește condiția din enunț

b) conțin doar numere nedivizibile cu 3

<=> conțin doar pe 1, 2, 4, 5, 7, 8

Final: $2^6 - 1$ (aici $\emptyset$ se exclude pentru că nu îndeplinește cerința din enunț)

c) conțin cel puțin un număr divizibil cu 3

subm a lui $M = \{1,2,4,5,7,8\}$

Sol 1 numărăm

- submulțimi care conțin pe 3 dar nu pe 6 : 2^6 $\{3, \underbrace{\ldots}\}$
- —//— 6 3 : 2^6
- —//— 3 și 6 : 2^6 $\{3, 6, \underbrace{\quad}_{\text{subm a lui } M}\}$

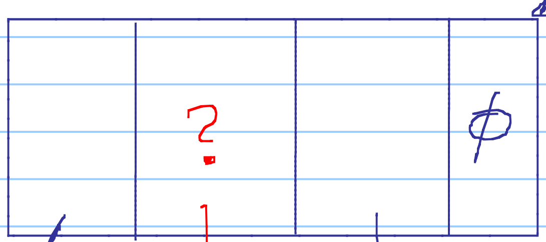
$3 \cdot 2^6 = 192$

Sol 2: Din totalul submulțimilor le scoatem pe acelea care conțin numere divizibile cu 3 (3 sau 6). Acestea din urmă vor fi de fapt submulțimi ale lui $\{1,2,4,5,7,8\}$

R. $2^8 - 2^6 = 192 = 2^6 \underbrace{(2^2 - 1)}_{3}$

d) Conțin atât numere divizibile cu 3, cât și numere nedivizibile cu 3

submulțimi ale lui M_8



fără 3 și fără 6

submulțimi care au atât elem din $\{3,6\}$ cât și din $\{1,2,4,5,7,8\}$

fără 1, 2, 4, 5, 7, 8

Din totalul de subm ale lui M_8 excludem

- $\emptyset$ — 1
- submulțimile care nu conțin 3, nici 6 — 2^6-1 ($\emptyset$ se numără în cele 2^6, deci
- submulțimile care nu conțin 1, 2, 4, 5, 7, 8 — 2^2-1

Final: $2^8 - 1 - (2^6-1) - (2^2-1) = 2^8 - 2^6 - 2^2 + 1$

e) conțin cel puțin un element mai mic ca 5 (<5)
din totalul submulțimilor excludem pe acelea care nu conțin elemente <5, adică vor conține elemente din $\{5,6,7,8\}$

R $2^8 - \underbrace{2^4}_{\text{nr submulțimilor lui } \{5,6,7,8\}}$

Probabilități

A – eveniment

$$P(A) = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile realizării lui } A}{\text{nr. cazurilor posibile (nr. total de cazuri)}}.$$

!! Atenție: dacă se folosește această definiție, cazurile pe care le numărăm trebuie să fie egal probabile, adică să aibă loc cu aceeași probabilitate

Exemplu: la aruncarea unui zar, evenimentele A_i, $i = \overline{1,6}$,

A_i: "pică fața i"

sunt egal probabile: $P(A_i) = \frac{1}{6}$, $i = \overline{1,6}$

① O familie intenționează să aibă 3 copii. Care este probabilitatea să aibă două fete și un băiat dacă la fiecare naștere sunt șanse egale să fie fată, respectiv băiat?

F : "este fată" $P(F) = P(B) = \frac{1}{2}$.

B : "este băiat"

Sol 1 (greșită!) ar fi să considerăm cazurile posibile

3 băieți

$\boxed{\text{2 fete și un băiat}}$

1 băiat și două fete

3 fete

Probabilitatea (greșită) ar fi $\frac{1}{4}$

Sol 2 (corectă): sunt 8 cazuri posibile, egal probabile!

F F F	B F F
F F B	$\boxed{B\ F\ B}$
F B F	$\boxed{B\ B\ F}$
$\boxed{F\ B\ B}$	B B B

Fiecare din aceste cazuri are probabilitatea $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Favorabile: 3

R: $\frac{3}{8}$

② Dacă în problema precedentă se consideră că $P(F) = \frac{2}{5}$ și $P(B) = \frac{3}{5}$?

!! In acest caz cele 8 evenimente posibile nu mai sunt egal probabile, de exemplu

$$P(\text{"FFF"}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \quad , \quad P(\text{"BBB"}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \quad (\text{diferite!})$$

În acest caz $P(\text{"FFB"}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = P(\text{"FBF"}) = P(\text{"BFF"})$

Final: R: $P(\text{"2 fete și un băiat"}) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5}$

(3) Fie $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ și $\mathcal{F} = \{f : A \to A\}$. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare o funcție din $\mathcal{F}$, aceasta să fie

a) impară

b) pară

sol $|\mathcal{F}| = 5^5$ nr total de funcții

a) vrem numărul de funcții impare

f impară dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, deci $f(0)$ se poate alege doar 0

! Observăm că: dacă $f(a)$ este precizat, atunci $f(-a)$ rezultă automat (va fi $-f(a)$)

Prin urmare, problema se reduce la alegerea lui $f(1)$ și $f(3)$ ($f(-1)$ și $f(-3)$ vor rezulta automat)

$f(1)$ se poate alege în 5 moduri (fiecare din elementele din A poate fi ales)

$f(3)$ se poate alege în 5 moduri (—" —)

Deci nr funcții impare $= 5 \cdot 5$

Final $P(\text{"} f \text{ impară"}) = \frac{5^2}{5^5} = \frac{1}{5^3}$

b) f pară $\quad f(x) = f(-x)$

$f(0)$ se poate alege în 5 moduri

$f(1)$ —" — 5 —" —

$f(3)$ —" — —" —

($f(-1)$ va fi automat $= f(1)$ și $f(-3)$ va fi automat $= f(3)$)

nr funcții pare : 5^3

$P(\text{" 1 } f \text{ pară "}) = \frac{1}{5^2}$