

Șiruri de numere reale

Lect. dr. Alina-Ramona Baias Prof. dr. Dorian Popa

March 8, 2021

1 Noțiuni teoretice

Definiție 1 Se numește șir de numere reale o funcție $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Punând $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, șirul se notează prin $(a_n)_{n \geq 1}$ sau (a_n) .

Un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, se numește :

- **mărginit** dacă există $M \geq 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- **crescător (descrescător)** dacă $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- **monoton** dacă este crescător sau descrescător.

1.1 Criterii utile în calculul limitelor de șiruri

Reamintim aici câteva criterii importante în calculul limitelor de șiruri.

Teoremă 1 (Criteriul cleștelui) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$, $(c_n)_{n \geq 1}$ șiruri de numere reale cu proprietatea

$$a_n \leq b_n \leq c_n, n \geq n_0.$$

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.

Teoremă 2 (Stolz-Cesaro I) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ șiruri de numere reale cu proprietățile:

1) $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict monoton și nemărginit;

2) există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$;

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teoremă 3 (Stolz-Cesaro II) Fie $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ șiruri de numere reale cu proprietățile:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$;
 - 2) $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict monoton;
 - 3) există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$;
- Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teoremă 4 (Consecința Teoremei lui Stolz-Cesaro) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, un șir de numere strict pozitive cu proprietatea că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Teoremă 5 (Criteriul raportului) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere strict pozitive cu proprietatea că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci:

- 1) dacă $l < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- 2) dacă $l > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
- 3) dacă $l = 1$, criteriul nu este eficient.

Următorul rezultat poate fi util pentru rezolvarea unor probleme în care criteriul raportului nu este eficient.

Teoremă 6 (Pr. 537) Fie $(x_n)_{n \geq 1}, x_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^n < 1.$$

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Următorul rezultat se poate folosi în studiul monotoniei șirurilor definite prin relații de recurență.

Teoremă 7 Fie $f : I \rightarrow I, I \subseteq \mathbb{R}$ și $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir definit prin relația

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, x_0 \in I.$$

Atunci:

- i) Dacă f este crescătoare $\implies (x_n)_{n \geq 0}$ este monoton;

ii) Dacă f este descrescătoare $\implies (x_{2n})_{n \geq 0}, (x_{2n+1})_{n \geq 0}$ sunt monotone și au monotonie diferită.

Demonstrație.

i) Presupunem $x_0 \leq x_1 \xrightarrow{f \text{ cresc.}} f(x_0) \leq f(x_1) \iff x_1 \leq x_2 \xrightarrow{f \text{ cresc.}} f(x_1) \leq f(x_2) \iff x_2 \leq x_3, \dots$

Deci $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$, prin urmare șirul este crescător.

Dacă $x_0 \geq x_1$, analog rezultă că șirul (x_n) este descrescător.

ii) Avem

$$\begin{aligned} x_{2n} &= f(x_{2n-1}) = f(f(x_{2n-2})) = (f \circ f)(x_{2n-2}), \quad n \geq 1, \\ x_{2n+1} &= f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})) = (f \circ f)(x_{2n-1}), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Cum $g = f \circ f$ este crescătoare, concluzia rezultă din i). Să presupunem că $(x_{2n})_{n \geq 0}$ este crescător $\implies x_{2n} \leq x_{2n+2}, n \geq 0 \implies f(x_{2n}) \geq f(x_{2n+2}) \implies (x_{2n+1})_{n \geq 0}$ este descrescător. Analog pentru $(x_{2n})_{n \geq 0}$ descrescător.

■

Următorul rezultat este util în studiul ecuațiilor.

Propoziție 1.1 Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție strict convexă. Atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel mult două rădăcini reale.

Demonstrație. Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$. Atunci $\exists t \in (0, 1)$ astfel încât $x_2 = (1 - t)x_1 + tx_3$. Deci:

$$0 = f(x_2) = f((1 - t)x_1 + tx_3) < (1 - t)f(x_1) + tf(x_3) = 0, \text{ contradicție.}$$

■

1.2 Șiruri remarcabile

1) Șirul $(e_n)_{n \geq 1}$,

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

este strict crescător și are limita e ($e \simeq 2,71828\dots$).

2) Șirul $(E_n)_{n \geq 1}$,

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

este strict crescător și are limita e .

3) Șirul $(\gamma_n)_{n \geq 1}$,

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este strict descrescător și mărginit inferior. Limita sa notată cu γ se numește **constanta lui Euler** ($\gamma \simeq 0,577\dots$).

Are loc dubla inegalitate:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2 Exerciții și probleme

Ex. 1 *Calculați:*

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n n!}{2^n n^n};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{n^3+n} \right);$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \dots + a^{\frac{n}{n}} \right), \quad a > 1 \text{ (pr. 304 Culegere)}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \arcsin \frac{k}{n^2}; \text{ (pr. 301 Culegere)}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \sqrt{a} + \dots + \sqrt[n]{a}}{\ln n}, a > 0; \text{ (pr. 293 Culegere)}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n}}{\ln^2 n}; \text{ (pr. 306 Culegere)}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right);$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}; \text{ (pr. 265 Culegere)}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n]{2})^n; \text{ (pr. 266 Culegere)}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{2})(2 - \sqrt[3]{2}) \cdots (2 - \sqrt[n]{2}). \text{ (pr. 267 Culegere)}$

Ex. 2 (Pr. 252-253 Culegere) Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}, \quad n \geq 1, x_0 = 1.$$

Să se calculeze: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Ex. 3 (Pr. 254-258 Culegere) Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 1, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul (x_n) să fie constant.

b) Determinați $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul (x_n) să fie crescător.

c) Dacă $x_0 > 0$ calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

d) Determinați $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul (x_n) să fie convergent.

e) Dacă $x_0 = -1$ calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Ex. 4 (Pr. 250 Culegere) Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență

$$x_{n+1} - ax_n + 2 = 0, \quad x_0 = a.$$

Să se determine a astfel încât şirul (x_n) să fie strict descrescător.

Ex. 5 (Pr. 263 Culegere) Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = 2^{\frac{x_n}{2}} \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Să se determine x_0 astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Ex. 6 (Pr. 312 Culegere) Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6 \quad x_0 = a, a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine a astfel încât şirul (x_n) să fie convergent.

Ex. 7 (Admitere 2019) Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2 \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

a) Dacă $x_{100} = 1$ determinaţi x_0 .

b) Să se determine x_0 astfel încât şirul (x_n) să fie convergent.

c) Dacă $x_0 = \frac{1}{2}$ calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

3 Indicaţii şi răspunsuri

Soluţie Ex. 1 a) Notăm $a_n = \frac{5^n n!}{2^n n^n}$. Aplicând criteriul raportului obţinem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{2^n n^n}{5^n n!} \\ &= \frac{5}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{5}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{5}{2e} < 1 \end{aligned}$$

Deci în baza criteriului raportului $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Notăm $x_n = \frac{1^2}{n^3+1} + \frac{2^2}{n^3+2} + \dots + \frac{n^2}{n^3+n}$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n} &\leq x_n \leq \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + 1} \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n)} &\leq x_n \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Aplicând criteriul cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$.

c) Notăm $x_n = \frac{1}{n} \ln \left(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \dots + a^{\frac{n}{n}} \right)$. Avem

$$\begin{aligned} a^n &\leq a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \dots + a^{\frac{n}{n}} \leq na^n \\ n \ln a &\leq \ln(a^{\frac{n}{1}} + a^{\frac{n}{2}} + \dots + a^{\frac{n}{n}}) \leq \ln n + n \ln a \\ \ln a &\leq x_n \leq \frac{\ln n}{n} + \ln a, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Aplicând criteriul cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln a, a > 1$.

d) Notăm

$$x_n = \sum_{k=1}^n \arcsin \frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\arcsin \frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}} \cdot \frac{k}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Avem

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\arcsin \frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}} \cdot \frac{1+2+\dots+n}{n^2} &\leq x_n \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\arcsin \frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}} \cdot \frac{1+2+\dots+n}{n^2} \\ \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\arcsin \frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} &\leq x_n \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{\arcsin \frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Aplicând criteriul cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

e) Fie $a_n = a + \sqrt[n]{a} + \dots + \sqrt[n]{a}$ și $b_n = \ln n$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ ((b_n) crescător și nemărginit), studiem existența limitei

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \sqrt[n+1]{a} + \dots + \sqrt[n+1]{a} - a - \sqrt[n]{a} - \dots - \sqrt[n]{a}}{\ln(n+1) - \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{a} - 1}{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - 1}{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \ln a. \end{aligned}$$

Deci conform teoremei Stolz-Cesaro obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \sqrt{a} + \dots + \sqrt[n]{a}}{\ln n} = \ln a$.

f) Fie $a_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n}$ și $b_n = \ln^2 n$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ ((b_n) crescător și nemărginit), studiem existența limitei

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\ln^2(n+1) - \ln^2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1) + \ln n} \cdot \frac{1}{(n+1) \ln(\frac{n+1}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{\ln(n+1)}} \cdot \frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deci conform teoremei Stolz-Cesaro obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n}}{\ln^2 n} = \frac{1}{2}$.

g) Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n - e}{\frac{1}{n}}$, deci vom calcula cu limite de funcții:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &= \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = \lim_{x \searrow 0} e \cdot \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} - 1}{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1} \cdot \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} \\ &= e \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (1 - \sqrt[n]{2}))^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt[n]{2}}{\frac{1}{n}}} = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.

j) Notăm $x_n = (2 - \sqrt{2})(2 - \sqrt[3]{2}) \dots (2 - \sqrt[n]{2})$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, calculăm limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt[n+1]{2})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 - \sqrt[n+1]{2})^{n+1}}{2 - \sqrt[n+1]{2}} \stackrel{i)}{=} \frac{1}{2} < 1.$$

Deci conform Teoremei 6, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție Ex. 2 a) $x_0 = 1 > 0 \implies x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Avem $x_{n+1} - x_n = \frac{2}{x_n} > 0 \implies (x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător, prin urmare există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă presupunem $x \in \mathbb{R}$ atunci trecând la limita în relația de recurență obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \iff x = x + \frac{2}{x} \iff 0 = \frac{2}{x} \text{ (fals),}$$

deci $x = +\infty$.

b) Fie $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{x_n^2}{n}}$. Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n} &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)^2 - x_n^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{4}{x_n} \right) = 4 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2. \end{aligned}$$

Soluție Ex. 3 a) Din $x_0 = x_1 \implies x_0 = e^{x_0} - 1$, cu soluția $x_0 = 0$. Dacă $x_0 = 0 \implies x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $x_{n+1} - x_n = e^{x_n} - x_n - 1 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată că $e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ cu egalitate dacă și numai dacă $x = 0$. Deci (x_n) crescător $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

c) Din (x_n) crescător rezultă că există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă presupunem $x \in \mathbb{R}$ atunci trecând la limita în relația de recurență obținem $x = e^x - 1 \implies x = 0$, contradicție cu $x_0 > 0$. Deci $x = +\infty$.

d) Dacă $x_0 = 0 \implies x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deci (x_n) convergent. Dacă $x_0 < 0 \implies x_1 = e^{x_0} - 1 < 0$ și prin inducție rezultă $x_n < 0$. Șirul (x_n) este crescător și mărginit inferior de 0 deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Deci șirul este convergent $\iff x_0 \leq 0$.

e) Avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{x_n}-1} - \frac{1}{x_n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^{x_n} - 1)x_n}{x_n - e^{x_n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_n - e^{x_n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_n - e^{x_n} + 1} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1 - e^x} = -2. \end{aligned}$$

Solutie Ex. 4 Dacă $a = 0 \implies x_{n+1} = -2, n \geq 0$, nu convine. Fie în continuare $a \neq 0, f(x) = ax - 2, x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, x_0 = a.$$

Dacă $a > 0 \implies f$ strict crescătoare $\xrightarrow{T7}$ Şirul este strict descrescător $\iff x_0 > x_1 \iff a > a^2 - 2 \iff a^2 - a - 2 < 0 \iff a \in (-1, 2)$ dar $a > 0$ deci $a \in (0, 2)$. Cazul $a < 0$ nu convine pentru că $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ au monotonii diferite conform teoremei 7.

Solutie Ex. 5 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ este strict crescătoare $\xrightarrow{T7} (x_n)_{n \geq 0}$ este monoton, deci $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$. Avem:

$x_1 - x_0 = 2^{\frac{x_0}{2}} - x_0$. Studiăm semnul $g(x) = 2^{\frac{x}{2}} - x, x \in \mathbb{R}$. "Ecuația $g(x) = 0$ are 2 rădăcini $x' = 2, x'' = 4$. Acestea sunt singurele rădăcini ale lui g deoarece g este strict convexă.

Dacă $x_0 \leq 2 \implies (x_n)_{n \geq 0}$ crescător și $x_n \leq 2, \forall n \geq 0 \implies (x_n)_{n \geq 0}$ convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Dacă $x_0 \in (2, 4) \implies (x_n)_{n \geq 0}$ descrescător și $x_n < 4, \forall n \geq 0 \implies (x_n)_{n \geq 0}$ convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Dacă $x_0 = 4 \implies x_n = 4, \forall n \geq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

Dacă $x_0 > 4 \implies (x_n)_{n \geq 0}$ crescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Deci $x_0 \in (-\infty, 4)$.

Solutie Ex. 6

$$x_{n+1} = (x_n - 2)^2 + 1 \quad n \geq 0.$$

Obținem

$$\begin{aligned} x_1 &= (a - 2)^2 + 2; \quad x_2 = (x_1 - 2)^2 + 2 = (a - 2)^{2^2} + 2 \dots \\ x_n &= (a - 2)^{2^n} + 2, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Şirul este convergent dacă și numai dacă $|a - 2| \leq 1 \iff a \in [1, 3]$.

Solutie Ex. 7 a) Din relația de recurență

$$x_{100} = x_{99} - x_{99}^2 \iff x_{99}^2 - x_{99} + 1 = 0, \text{ deci } x_{99} \notin \mathbb{R}.$$

Prin urmare nu există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_{100} = 1$.

b) $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leq 0 \implies (x_n)$ descrescător $\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă (x_n) este convergent $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Dacă $x_0 < 0$, întrucât $x_n < x_0, \forall n \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Dacă $x_0 > 0 \implies x_1 < 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \implies$ Şirul este convergent pentru $x_0 \in [0, 1]$.

c) Pentru a calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ aplicăm consecinţa teoremei lui Stolz-Cesaro şi avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x_n) = 1$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.