Calcul integral (I)

Prof. dr. Ioan Gavrea

1. Funcții integrabile

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, Δ_n o diviziune a intervalului $[a,b]$

$$\Delta_n:\ a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}\dots<x_{n+1}=b$$

Norma diviziunii Δ_n este numărul $\|\Delta_n\|$,

$$\|\Delta_n\|=\max_{k=\overline{0,n}}(x_{k+1}-x_k)$$

O mulțime de puncte c, $c=\{c_0,\dots,c_n\}$, $c_k\in[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n}$ se numește mulțime de puncte intermediare.

O sumă Riemann a funcției f, relativă la diviziunea Δ_n și punctele intermediare c este

$$S_f(\Delta_n,c)=\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(c_k)$$

După cum se cunoaște, funcția f este integrabilă pe $[a,b]$ dacă

$$\lim_{\|\Delta_n\|\to 0} S_f(\Delta_n,c)$$

există și este finită pentru orice alegere a punctelor intermediare c. În acest caz valoarea limitei se notează prin $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se observă că, prin schimbarea de variabilă $\frac{x-a}{b-a}=t$ obținem:

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f(a+t(b-a))\,dt$$

Folosind noțiunea de integrală și faptul că orice funcție continuă este integrabilă putem calcula limitele unor șiruri de numere reale

Problema 1. (Problema 484) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{8} \arcsin \frac{k}{2n}.$$

Soluție Fie

$$a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{8} \arcsin \frac{k}{2n}.$$

Putem scrie a_n sub forma:

$$a_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2n}\right)^2 \arcsin \frac{k}{2n}.$$

Funcția $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \arcsin x$ este o funcție continuă. Dacă considerăm diviziunea

$$\Delta_n : 0 < \frac{1}{2n} < \frac{2}{2n} < \ldots \frac{k}{2n} < \frac{k+1}{2n} < \ldots \frac{2n}{2n} = 1$$

$\left(x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2n} \right)$, observăm că $\|\Delta_n\| = \frac{1}{2n}$, $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Luând ca puncte intermediare mulțimea $c = \{0, \frac{1}{2n}, \ldots \frac{k}{2n}, \ldots \frac{2n}{2n}\}$, constatăm că a_n este o sumă Riemann a funcției f. Obținem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx.$$

Prin schimbarea de variabilă $x = \sin t$ obținem

$$I = \int_0^1 t \sin^2 t \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)' dt$$

Integrând prin părți obținem:

$$I = \frac{t \sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (1 - \cos^2 t) \, dt$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)' (1 - \cos^2 t) \, dt$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} ($$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$$

Observație: Să observăm că a_n se poate scrie sub forma

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{8}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Dacă considerăm funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{8}x^2\arcsin\frac{x}{2}$

și diviziunea

$$\Delta_n:\ 0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{k}{n}<\frac{k+1}{n}<\dots\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{n}$$

a intervalului $[0,2]$, atunci $x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n}=\|\Delta_n\|$, $k=\overline{0,2n-1}$

Luând mulțimea punctelor intermediare

$$c=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{2n}{n}\right\}$$

obținem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{8}\int_0^2 x^2\arcsin\frac{x}{2}dx \overset{x=2t}{=} \int_0^1 t^2\arcsin t\,dt$$

Problema 2 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2+k+1}}$$

Soluție Metoda 1.

Fie

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2+k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2+k+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n+1}}$$

Să observăm că:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2+k+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{k^2+k+1}}{n}\right)^2}}$$

Considerăm diviziunea Δ_n a intervalului $[0,1]$

$$\Delta_n:\ 0<\frac{1}{n}<\dots<\frac{n}{n},\quad \|\Delta_n\|=\frac{1}{n}$$

Să observăm că

$$\frac{k}{n}<\frac{\sqrt{k^2+k+1}}{n}\leq\frac{k+1}{n},\quad k=0,\dots n-1$$

Funcția $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ este o funcție continuă

pe $[0,1]$. Luând $C = \{c_0, c_1, \dots c_{n-1}\}$, $c_k = \frac{\sqrt{k^2+k+1}}{n}$, $k = \overline{0,n-1}$

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{k^2+k+1}}{n}\right)^2}}$ este o sumă Riemann a funcției

f.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(1+\sqrt{2}),$$

deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2+n+1}} = 0.$

Metoda 2   Să observăm că avem

$$\frac{1}{\sqrt{2n^2+n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+(k+1)^2}} \le a_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$$

și

Sumele $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+(k+1)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}}$

sunt sume Riemann ale aceleiași funcții

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

relative la diviziunea

$$\Delta_n:\ 0, \tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots, \tfrac{n}{n}$$

cu mulțimea punctelor intermediare

$$\{0, \tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{n}{n}\}$$

respectiv $\{\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}, \dots \tfrac{n}{n}\}$.

Din teorema cleștelui obținem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Problema 3

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2\cos^2\frac{1}{n}+1}$$

Soluție Fie

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2\cos^2\frac{1}{n}+1}=\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}\cos\frac{1}{n}}{1+\frac{k^2\cos^2\frac{1}{n}+1}{n^2}}$$

O margine superioară pt a_n se obține prin:

$$(1)\qquad a_n\le\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}\cos\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\cos\frac{1}{n}\right)^2}$$

Folosind inegalitatea $\cos^2\frac{1}{n}<1$ obținem

$$(2)\qquad a_n>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\frac{k+1}{n}}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}$$

Din (1) și (2) obținem

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

2. Calculul unor integrale definite

În cele ce urmează vom folosi, printre altele, următoarele afirmații pe care le presupunem cunoscute pentru o funcție integrabilă.

1. Dacă $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ este o funcție impară atunci
$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=0$$
2. Dacă $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ este o funcție pară, atunci
$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$
3. $$\int_a^b f(a+b-x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$
4. Dacă f este o funcție periodică, de perioadă T, f integrabilă pe orice interval

închis și mărginit, atunci

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

sau, altfel spus, integrala unei funcții periodice pe orice interval de lungime perioada este aceeași!

Problema 4 (Problema 461) Să se calculeze

$$I=\int_{-1}^{1}\left(1+2x^{2015}\right)e^{-|x|}\,dx$$

Soluție

$$I=\int_{-1}^{1}e^{-|x|}\,dx+2\int_{-1}^{1}x^{2015}e^{-|x|}\,dx$$

Funcția $f_1(x)=e^{-|x|}$ este o funcție pară $\overset{(2)}{\Longrightarrow}\int_{-1}^{1}e^{-|x|}dx=2\int_0^1 e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_0^1=2-\frac{2}{e}$. Funcția $f_2(x)=x^{2015}e^{-|x|}$ este impară

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\int_{-1}^{1}x^{2015}e^{-|x|}dx=0 \Rightarrow I=2-\frac{2}{e}.$

Problema 5 Să se calculeze. $\int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(a+x)^{n+1}}\,dx$ $(a>0)$

(Problema 470)

Soluție

$$\int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(a+x)^{n+1}}\,dx=-\frac{1}{2a}\int_0^a\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{a-x}{a+x}\right)'dx$$

$$=-\frac{1}{2an}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{n}\Bigg|_0^a=\frac{1}{2na}.$$

Problema 6 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcție periodică de perioadă T, $(T>0)$. Să se arate că f are primitive funcții periodice dacă și numai dacă

$$\int_0^T f(x)\,dx=0$$

(Se presupune f integrabilă pe orice interval închis și mărginit.).

Soluție: Deoarece două primitive diferă între ele printr-o constantă este suficient să considerăm primitiva:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

este ușor de arătat că, dacă F este periodică perioada este T. Din egalitatea $F(x+T)=F(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\overset{x=0}{\Rightarrow}$ $F(T)=F(0)$. Cum $F(0)=0$ obținem

$$\int_0^T f(t)dt=0.$$

Să demonstrăm suficienta:

$$(*)\quad F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+\int_x^{x+T} f(t)dt.$$

Folosind 4. avem $\int_x^{x+T} f(t)=\int_0^T f(t)dt=0$

Cum $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, din (*) obținem:

$$F(x+T)=F(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Problema 7 (Problema 495) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{\sin^{24}x}{\cos^{24}x+\sin^{24}x}.$$

Funcția $f+c$, $c\in\mathbb{R}$, are o primitivă periodică dacă și numai dacă c are valoarea ...

Soluție: Funcția $f+c$ este o funcție periodică de perioadă $T=\pi$. Din Problema 6 obținem că

$$\int_0^{\pi} f(x)dx+c\pi=0$$

$$\Rightarrow\quad c=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{24}x}{\cos^{24}x+\sin^{24}x}dx$$

Folosind proprietatea 3. obținem și egalitatea

$$c=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{24}x}{\sin^{24}x+\cos^{14}x}dx$$

$$\Rightarrow\quad c=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=-\frac{1}{2}$$

Problema 8 (Problema 478). Valoarea integralei

$$I=\int_0^1 \{nx\}^k dx, \quad (k\geq 0)$$

este , unde $\{\ \}$ reprezintă partea fracționară.

Soluție. Dacă f este o funcție periodică de perioadă T, atunci funcția $g(x)=f(ax)$ $(a>0)$ este o funcție periodică de perioadă $T_1=\frac{T}{a}$. Acesta rezultă din următoarele egalități succesive:

$$g(x+T_1)=g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)$$
$$=g(x)$$

Cum $\{\cdot\}$ are perioada $1 \Rightarrow \{n\cdot\}^k$ are perioada $T_1=\frac{1}{n}$.

Obținem $I=n\int_0^{1/n}\{nx\}^k dx=n\int_0^{1/n}(nx)^k dx$
$$=n^{k+1}\int_0^{1/n}x^k dx=\frac{1}{k+1}$$

Problema 9.

Să se calculeze limita șirului

$$a_n=\int_0^n \frac{dx}{1+n^2\arcsin^2(\sin x)}$$

Soluție. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ funcția

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n^2\arcsin^2(\sin x)}$$

este o funcție pară, periodică de perioadă $T=\pi$.

Să observăm că a_n poate fi scris sub forma

$$a_n=\int_0^{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]+\alpha_n}\frac{dx}{1+n^2\arcsin^2(\sin x)}dx$$

unde $[\ ]$ reprezintă funcția parte întreagă,

$$\alpha_n=n-\pi\left[\frac{n}{\pi}\right], \quad \alpha_n\in(0,\pi)$$

$$\Rightarrow a_n = \int_0^{\pi[\frac{n}{\pi}]} \frac{dx}{1+n^2\arcsin^2(\sin x)} + \int_{\pi[\frac{n}{\pi}]}^{\alpha_n+\pi[\frac{n}{\pi}]} \frac{dx}{1+n^2\arcsin^2(\sin x)}$$

$$= \left[\frac{n}{\pi}\right]\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2x^2} + b_n, \quad b_n = \int_{\pi[\frac{n}{\pi}]}^{\alpha_n+\pi[\frac{n}{\pi}]} f_n(x)dx$$

$$= 2\left[\frac{n}{\pi}\right]\cdot\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{n\pi}{2} + b_n$$

$$= 2\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\pi}\right\}\right)\operatorname{arctg}\frac{n\pi}{2} + b_n$$

Deoarece $\alpha_n \in (0,\pi)$ și $f_n(x) > 0$. avem:

$$0 < b_n < \int_{\pi[\frac{n}{\pi}]}^{\pi[\frac{n}{\pi}]+\pi} f_n(x)dx = \frac{2}{n}\operatorname{arctg}\frac{n\pi}{2} < \frac{\pi}{n}$$

Din ultimile inegalități obținem:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

De aici deducem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n\pi}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\pi}\right\}\operatorname{arctg}\frac{n\pi}{2}$$

$$= 1.$$

Deci $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Problema 10 (Problema 536) Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{dx}{1+n^2\cos^2 x}$$

Soluție funcția $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2\cos^2 x}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este

este o funcție pară și periodică de perioada π

Procedând ca și Problema 9

obținem $a_n = \int_0^n \frac{dx}{1+n^2\cos^2 x} = 2\left[\frac{n}{\pi}\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\cos^2 x} + c_n$

unde $c_n = \int_{\pi[\frac{n}{\pi}]}^{\alpha_n+\pi[\frac{n}{\pi}]} f_n(x)dx$, $\alpha_n = n - \pi\left[\frac{n}{\pi}\right] \in (0,\pi)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x + (n^2+1)\cos^2 x}$$

O primitivă a funcției f_n, pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ este

$$G_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{n^2+1}}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{n^2+1}}, & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{n^2+1}}$$

$$\Rightarrow a_n = \cancel{2}\left[\frac{n}{\pi}\right] \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}\sqrt{n^2+1}} + c_n$$

sau $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}\left\{\frac{n}{\pi}\right\} + c_n$. unde $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

La fel ca la Problema 9

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

__Observație__ Dacă f este o funcție periodică de perioadă T, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. și dacă șirul

$$a_n = \int_0^n \frac{dx}{1+n^2 f(x)}$$

este __convergent__ atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{T} \lim_{n\to\infty} n \int_0^T \frac{dx}{1+n^2 f(x)}$$

Demonstrația se poate face folosind aceeași idee ca la Problema 9.