Calcul Integral II

Prof. dr. Bogdan GAVREA
24 Aprilie 2021

Problema 1 *Fie* $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, $a \in (-1, 1)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \geq 0$ *şi* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Presupunem că* f *este integrabilă pe intervalul* $[a, 1]$. *Arătaţi că*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^1 x^{a_n} f(x)dx = 0.$$

Soluţie. Fie $J_n = \int_a^1 x^{a_n} f(x)dx$. Avem,

$$\begin{aligned} |J_n| &= \left| \int_a^1 x^{a_n} f(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^1 |x|^{a_n} |f(x)|dx \\ &\leq M \int_a^1 |x|^{a_n} dx \\ &\leq M \int_{-1}^1 |x|^{a_n} dx = 2M \int_0^1 x^{a_n} dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |J_n| \leq 2M \frac{1}{a_n + 1}.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, obţinem $\lim_{n\to\infty} J_n = 0$ şi demonstraţia este finalizată.

Problema 2 *Fie* $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, $a \in (-1, 1)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \geq 0$ *şi* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Presupunem că* f *este integrabilă pe intervalul* $[a, 1]$. *Arătaţi că*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \int_a^1 x^{a_n} f(x)dx = f(1).$$

Soluţie. Demonstrăm egalitatea de mai sus în ipoteza în care f este derivabilă şi f' este integrabilă pe intervalul $[a,1]$. Avem

$$\begin{aligned} a_n\int_a^1 x^{a_n}f(x)dx &= a_n\int_a^1\left(\frac{x^{a_n+1}}{a_n+1}\right)'f(x)dx \\ &= \frac{a_n}{a_n+1}x^{a_n+1}f(x)\Big|_a^1-\frac{a_n}{a_n+1}\int_a^1 x^{a_n+1}f'(x)dx \\ &= \frac{a_n}{a_n+1}f(1)-\frac{a_n}{a_n+1}a^{a_n+1}f(a)-\frac{a_n}{a_n+1}\int_a^1 x^{a_n+1}f'(x)dx. \end{aligned}$$

Ţinând cont că $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+1}=1$, $a\in(-1,1)$, iar integrala din ultima identitate de mai sus converge la 0 cand $n\to\infty$, conform exerciţiului anterior, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n\int_a^1 x^{a_n}f(x)dx=f(1)$$

şi demonstraţia este finalizată.
Observaţie. În cazul particular $a_n=n$, se obţine problema 539 din culegere.

Problema 3 *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere pozitive astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ *şi* $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=\int_0^{x^2}e^t t^{a_n}dt,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(1)$.

Soluţie. Avem

$$f_n(1)=\int_0^1 e^t t^{a_n}dt.$$

Folosind problema 1 obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^t t^{a_n}dt=0$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(1)=0$.
Observaţie. În cazul particular $a_n=n$ se obţine problema 511 din culegere.

Problema 4 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}n^p\int_{-1}^0\left(x+e^x\right)^{n^p}dx,\ p>0.$$

Soluţie. Fie $f:[-1,0]\to\left[-1+\frac{1}{e},1\right]$, $f(x)=x+e^x$. Observăm că funcţia f este o funcţie inversabilă şi notăm cu $g:\left[-1+\frac{1}{e},1\right]\to[-1,0]$, inversa acesteia, i.e., $g=f^{-1}$. În integrala de mai sus, vom face schimbarea de variabilă $t=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(t)\Leftrightarrow x=g(t)$, ceea ce implică $dx=\frac{1}{f'(g(t))}dt$. Avem

$$\begin{aligned} n^p\int_{-1}^0\left(x+e^x\right)^{n^p}dx &= n^p\int_{f(-1)}^{f(0)}\frac{t^{n^p}}{f'(g(t))}dt \\ &= n^p\int_{-1+\frac{1}{e}}^1\frac{t^{n^p}}{f'(g(t))}dt \end{aligned}$$

Folosind acum Problema 2 cu $a=-1+\frac{1}{e}\in(-1,1)$, $a_n=n^p$ şi funcţia dată de $\frac{1}{f'(g(t))}$, obţinem valoarea limitei cerute:

$$\lim_{n\to\infty} n^p\int_{-1}^{0}(x+e^x)^{n^p}dx=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2},$$

unde am folosit că $g(1)=f^{-1}(1)$ este unica soluţie a ecuaţiei $f(x)=1$ rezultând că $g(1)=0$.

Problema 5 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} n^p\int_{2}^{e}(\ln x)^{n^k}\,dx,\ p,k>0.$$

Soluţie. Fie

$$a_n=n^p\int_{2}^{e}(\ln x)^{n^k}\,dx.$$

Folosind substituţia $x=e^t$, obţinem

$$\begin{aligned} a_n &= n^p\int_{\ln 2}^{1}t^{n^k}e^t dt\\ &= n^{p-k}\left[n^k\int_{\ln 2}^{1}t^{n^k}e^t dt\right]. \end{aligned}$$

Cum $\ln 2\in(0,1)\subset(-1,1)$, folosind Problema 4, rezultă că paranteza dreaptă din egalitatea de mai sus tinde la numărul e. Având în vedere această observaţie, deosebim următoarele cazuri:

a) $p<k\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

b) $p=k\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=e$;

b) $p>k\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Observaţie. Pentru $p=k=1$ se obţine Problema 730 din culegere.

Problema 6 *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale,* $a_n>0$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. *Dacă* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă pe* $[0,1]$,*atunci*

$$\lim_{n\to\infty}a_n\int_0^1 x^{a_n}f\left(x^{a_n}\right)dx=\int_0^1 f(x)dx.$$

Soluţie. Fie

$$I_n=a_n\int_0^1 x^{a_n}f\left(x^{a_n}\right)dx.$$

Folosind substituţia $t=x^{a_n}$ $(x=t^{\frac{1}{a_n}})$, I_n devine

$$I_n=\int_0^1 t^{\frac{1}{a_n}}f(t)dt.$$

Cum f este o funcţie integrabilă pe $[0,1]$, există $M>0$, astfel încât $|f(x)|\leq M$.
Avem

$$\begin{aligned}\left|I_n-\int_0^1 f(t)dt\right| &= \left|\int_0^1\left(t^{\frac{1}{a_n}}-1\right)f(t)dt\right|\\ &\leq \int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{a_n}}\right)|f(t)|dt\\ &\leq M\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{a_n}}\right)dt = M\left(1-\frac{1}{\frac{1}{a_n}+1}\right).\end{aligned}$$

Am obţinut că

$$\left|I_n-\int_0^1 f(t)dt\right|\leq\frac{M}{a_n+1}.$$

Trecând la limită în inegalitatea de mai sus, se obţine concluzia dorită.
Observaţie. Problema 6 reprezintă o generalizare a Problemei 540 din culegere.

Problema 7 *Să se calculeze*

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 x^{2n}e^{x^{2n}}dx}{\int_0^1 x^{5n}e^{x^2}dx}.$$

Soluţie. Avem

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n\int_0^1 x^{2n}e^{x^{2n}}dx}{5n\int_0^1 x^{5n}e^{x^2}dx}\frac{5n}{2n}=\frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n\int_0^1 x^{2n}e^{x^{2n}}dx}{5n\int_0^1 x^{5n}e^{x^2}dx}.$$

- Conform Problemei 2, cu $a_n=5n,\ f(x)=e^{x^2}$, avem

$$\lim_{n\to\infty}5n\int_0^1 x^{5n}e^{x^2}dx=f(1)=e.$$

- Conform Problemei 6, cu $a_n=n,\ f(x)=xe^{x^2}$,, avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 x^{2n}e^{x^{2n}}dx &= \lim_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n\left[x^n e^{(x^n)^2}\right]dx\\ &= \int_0^1 xe^{x^2}dx\\ &= \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1=\frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

Răspunsul final devine

$$L=\frac{5(e-1)}{2}.$$

Problema 8 *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere pozitive astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. *Fie* $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *funcţii continue, astfel încât* $f(x), h(x) > 0, \forall x \in [0,1]$. *Să se calculeze*

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \int_0^1 \frac{x^{a_n} g\left(x^{a_n}\right)}{f(x) + h\left(x^{a_n}\right)}.$$

Soluţie. Fie

$$I_n = a_n \int_0^1 \frac{x^{a_n} g\left(x^{a_n}\right)}{f(x) + h\left(x^{a_n}\right)} dx.$$

Prin schimbarea de variabilă $x^{a_n} = t$, obţinem

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{a_n}} g(t)}{f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right) + h(t)} dt.$$

Vom arăta că

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{g(t)}{f(1) + h(t)} dt.$$

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că:

$$\lim_{n\to\infty} \left| I_n - \int_0^1 \frac{g(t)}{f(1) + h(t)} dt \right| = 0.$$

Fie $m = \min\limits_{t\in[0,1]} (f(t) + h(t)) > 0$, M cel mai mare dintre numerele $\max\limits_{t\in[0,1]} |g(t)|$ şi $\max\limits_{t\in[0,1]} |g(t)| h(t)$. Folosind inegalitatea $\left|\int_a^b u(x)dx\right| \le \int_a^b |u(x)|dx$, obţinem succesiv:

$$\left| I_n - \int_0^1 \frac{g(t)}{f(1) + h(t)} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{g(t)\left(t^{\frac{1}{a_n}} f(1) + t^{\frac{1}{a_n}} h(t) - f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right) - h(t)\right)}{(f(1) + h(t))\left(f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right) + h(t)\right)} dt \right|$$

$$\le \frac{1}{m^2} \left(\int_0^1 |g(t)| h(t) \left| t^{\frac{1}{a_n}} - 1 \right| dt + \int_0^1 |g(t)| f(1) \left| t^{\frac{1}{a_n}} - 1 \right| dt + \int_0^1 |g(t)| \left| f(1) - f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right) \right| dt \right)$$

$$\le \frac{M}{m^2} \left(\int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{a_n}}\right) dt + f(1) \int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{a_n}}\right) dt + \int_0^1 \left| f(1) - f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right) \right| dt \right). \quad (1)$$

Avem

$$\int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{a_n}}\right) dt = 1 - \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{1}{a_n + 1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| f(1) - f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right) \right| dt &= a_n \int_0^1 \left| f(1) - f(y) \right| y^{a_n - 1} dy \\ &= \frac{a_n}{a_n - 1} (a_n - 1) \int_0^1 \left| f(1) - f(y) \right| y^{a_n - 1} dy \quad (3) \end{aligned}$$

Din (2), obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{a_n}}\right) dt = 0, \tag{4}$$

iar din (3), folosind Problema 2, unde rolul lui a_n este luat de $a_n - 1$ şi rolul funcţiei f de $|f(1) - f(y)|$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left|f(1) - f\left(t^{\frac{1}{a_n}}\right)\right| dt = 0 \tag{5}$$

Folosind acum (4) şi (5) în (1). obţinem

$$L := \lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 \frac{g(t)}{f(1) + h(t)} dt.$$

Problema 9 (Problema 823**, Culegere)** *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^n} dx.$$

Soluţie. Folosim Problema 13, cu

$$a_n = n, g(x) = 1, f(x) = 1 + x, h(x) = x.$$

Avem $f(1) = 2 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^n} dx = \int_0^1 \frac{1}{2 + x} dx = \ln\frac{3}{2}.$$

Vă propunem spre rezolvare următoarea problemă:

Problema 10 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^{3n}}{2 + x + x^{2n}} dx.$$

Problema 11 *Dacă* $b > 0$ *şi* $x^2 + ax + 1 > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{b}, b\right]$, *să se calculeze*

$$I = \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\ln x}{x^2 + ax + 1} dx.$$

Soluţie. Prin schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$, obţinem

$$I = \int_b^{\frac{1}{b}} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2} + \frac{a}{t} + 1}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\ln\frac{1}{t}}{1 + at + t^2} dt = -\int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{\ln t}{1 + at + t^2} dt,$$

adică $I = -I$, de unde rezultă că $I = 0$.

Problema 12 (Problema 533, Culegere) *Să se calculeze*

$$I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2+3} dx.$$

Soluţie. În rezolvarea problemei precedente, au fost importante două lucruri: coeficientul lui x^2 şi termenul liber sunt aceleaşi şi produsul limitelor de integrare este 1. Urmărim să obţinem aceleasi proprietăţi şi pentru I. Avem

$$I = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{\ln x}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln(\sqrt{3}t)}{t^2+1}\sqrt{3}dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln\sqrt{3}+\ln t}{t^2+1}dt\right) = \frac{\ln 3}{2\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln t}{t^2+1}dt.$$

Din Problema 11, cu $b=\sqrt{3}$, $a=0$, obţinem

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\ln t}{t^2+1}dt = 0.$$

Cum

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} &= \operatorname{arctg} t\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \\ &\Rightarrow \ I = \frac{\pi \ln 3}{12\sqrt{3}}.\end{aligned}$$