Ecuații și inecuații (II)

① (120) Numărul de soluții reale ale ecuației

$$9^x - 5^x - 4^x - 2\sqrt{20^x} = 0 \text{ este} \dots$$

Sol: $9^x - 5^x - 4^x - 2\sqrt{5^x \cdot 4^x} = 0 \iff 9^x - \left((\sqrt{5^x})^2 + (\sqrt{4})^x - 2\sqrt{5^x} \cdot \sqrt{4^x} \right) = 0$

$9^x - (\sqrt{5}^x + 2^x)^2 = 0 . \iff \underbrace{(3^x + \sqrt{5}^x + 2^x)}_{\neq 0}(3^x - \sqrt{5}^x - 2^x) = 0$

$\Rightarrow 3^x - \sqrt{5}^x - 2^x = 0$. Se observă că $x=2$ este soluție a ec. $9-5-4=0$ ✓

Mai sunt și altele? $\iff 1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x$. $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}$ subunitare.

Dacă $x<2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x > \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$

Dacă $x>2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$. $\Rightarrow x=2$ este unica soluție.

(2) (118) Mulțimea soluțiilor inecuației $\lg\left((x^3-x-1)^2\right)<2\lg(x^3+x-1)$ este:

[A] $\mathbb{R}$ [B] $(0,\infty)$ [C] $(1,\infty)$ [D] $(0,1)$ [E] alt răspuns.

Sol: $\begin{cases} x^3+x-1>0 \\ x^3-x-1\neq 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
x^3+x-1	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)=x^3+x-1$; $f'(x)=3x^2+1>0$

$\Rightarrow f$ strict crescătoare; continuă $\Rightarrow x\in(\alpha,+\infty)$

$g(x)=x^3-x-1$; $g'(x)=3x^2-1$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-1<0$; $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	β	2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\nearrow$	-1	0	5	$\nearrow$	$+\infty$

$x \neq \beta$.

Avem: $2\lg|x^3-x-1| < 2\lg(x^3+x-1)$. lg - crescătoare

$\Leftrightarrow |x^3-x-1| < x^3+x-1$.

Cazul I $x^3-x-1>0$ adică $x\in(\beta,+\infty)\cap(\alpha,+\infty)=(\beta,+\infty)$.

Inecuația devine $x^3-x-1<x^3+x-1 \Leftrightarrow 2x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow \underbrace{x\in(\beta,+\infty)}_{S_1}$.

Cazul II $x^3-x-1<0$ adică $x\in(-\infty,\beta)\cap(\alpha,+\infty)=(\alpha,\beta)$.

Inecuația devine: $-x^3+x+1<x^3+x-1 \Leftrightarrow x^3-1>0 \Leftrightarrow (x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{>0}>0$

$\Leftrightarrow x>1$. Deci soluția este $\underbrace{x\in(1,\infty)\cap(\alpha,\beta)=(1,\beta)}_{S_2}$.

Reunim cele 2 cazuri $\Rightarrow S=(1,\beta)\cup(\beta,+\infty)=(1,+\infty)\setminus\{\beta\} \Rightarrow$ răspuns $\boxed{E}$.

③ (simulare 2016) Inegalitatea $x^2-2xy+2y^2+2x-6y+m\geq 0$ are loc pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m\in$?

Sol: $x^2-2xy+y^2+y^2+2x-2y-4y+m\geq 0$.

$(x-y)^2+2(x-y)+y^2-4y+4-4+m\geq 0$

$(x-y)^2+2(x-y)+(y-2)^2+m-4\geq 0$ $\quad (x-y)^2+2(x-y)+1+(y-2)^2+m-4-1\geq 0$.

$(x-y+1)^2+(y-2)^2\geq 5-m$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

Știm $(x-y+1)^2+(y-2)^2\geq 0$ $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ (egalitatea are loc pt. $y=2$ și $x=1$).

$\Rightarrow$ $5-m\leq 0$ este condiția cerută $\Rightarrow$ $m\in[5,+\infty)$.

④ (2023) Câte soluții are ecuația $x^2=3y^2+1$ în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

Sol: Se observă că are sol. banală: $(1,0)$ $(x=1, y=0)$ și $(-1,0)$.

Tot prin observație directă găsim $(2,1)$ (și $(-2,-1), (-2,1), (2,-1)$)

Ne putem referi la sol. din $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Pp. că (α,β) este o soluție nebanală $\Rightarrow$ $\alpha^2-3\beta^2=1$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta\sqrt{3})(\alpha+\beta\sqrt{3})=1$. $\Leftrightarrow (\alpha-\beta\sqrt{3})^2(\alpha+\beta\sqrt{3})^2=1$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha^2+3\beta^2-2\alpha\beta\sqrt{3})(\alpha^2+3\beta^2+2\alpha\beta\sqrt{3})=1$

Notăm $\alpha^2+3\beta^2=\alpha_1$ și avem $(\alpha_1-\beta_1\sqrt{3})(\alpha_1+\beta_1\sqrt{3})=1 \Leftrightarrow \alpha_1^2-3\beta_1^2=1$.

$2\alpha\beta=\beta_1$

$(\alpha_1,\beta_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ perechea (α_1,β_1) este soluție a ecuației.

Inductiv $\Rightarrow$ ecuația are o infinitate de soluții în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Obs a) Analog se studiază $x^2 - py^2 = 1$, unde $p \in \mathbb{N}$ nu este pătrat perfect.

b) Pt. o ecuație de forma $x^2 - n^2y^2 = 1$, cu $n \in \mathbb{N}$.

Avem $\underbrace{(x-ny)}_{\in \mathbb{Z}}\underbrace{(x+ny)}_{\in \mathbb{Z}} = 1$. Singurele variante posibile:

$\begin{cases} x - ny = 1 \\ x + ny = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1;\ y = 0.\quad (1,0)$

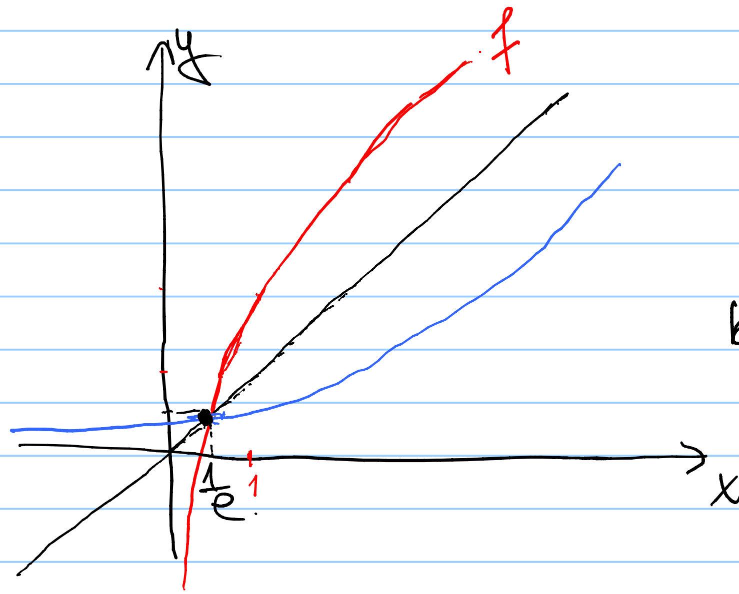
sau $\begin{cases} x - ny = -1 \\ x + ny = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1;\ y = 0 \Rightarrow (-1,0).$

(ecuația lui Pell).

⑤ (simulare 2009) Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = x + 1 + \ln x$. Fie g inversa lui f.
Soluția ecuației $f(x) = g(x)$ este ...

<u>Sol</u> studiem f. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ pt. $x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ este strict crescatoare.

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$. (asimptotă verticală) ; $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.



Graficul funcției g este simetricul graficului funcției f față de prima bisectoare.

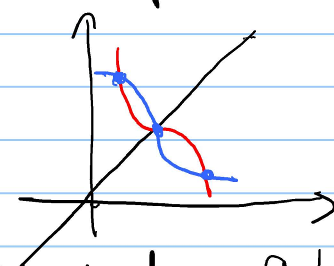
Intersecția dintre graficul lui f și prima bisectoare este dată de $f(x) = x$

$\Leftrightarrow x + 1 + \ln x = x \Leftrightarrow \ln x = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{e}$.

$\Rightarrow$ singurul punct de intersecție dintre f și g este $x = \frac{1}{e}$. (grafic).

ÎN GENERAL: Chiar dacă graficele a două funcții sunt simetrice față de prima bisectoare, Nu înseamnă că punctele comune ale graficelor pot să fie numai pe prima bisectoare.



(6) Se consideră ec: $ax^2+bx+c=0$, unde, a, b, c sunt numere întregi impare.
Care din afirmații este adevărată?

[A] ec. o rădăcină pară [B] ec. are o răd. impară [C] ec. are două răd. pare.
[D] ec. are două răd. impare [E] ec. nu are rădăcini întregi.

Sol. Avem $c=-ax^2-bx$.

Pp. că x este soluție, număr par. $\Rightarrow$ ax^2 și bx numere pare $\Rightarrow$ ax^2+bx număr par

$\Rightarrow$ $c=$ nr. par - contradicție.

Pp. că x este număr impar $\Rightarrow ax^2$ și bx numere impare $\Rightarrow ax^2+bx$ nr. par.

$\Rightarrow c=$ nr. par. – contradicție.

În concluzie, răspuns $\boxed{E}$.

(98)

7) Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-11}=7$ este ...

Sol Condiții: $x-11\geq 0 \Rightarrow x\in[11,+\infty)$.

Încă o condiție: $7-\sqrt[3]{x}\geq 0$. $\Rightarrow \sqrt[3]{x}\leq 7$

Notăm $\sqrt[3]{x}=u$ și $\sqrt{x-11}=v$. $\Rightarrow u+v=7$ $\Rightarrow \begin{cases} u+v=7 \\ u^3-v^2-11=0 \end{cases}$

Avem $x=u^3$ și $x=v^2+11 \Rightarrow u^3=v^2+11$

$v=7-u \Rightarrow u^3-(7-u)^2-11=0$ $\quad u^3-49+14u-u^2-11=0$

$\Rightarrow u^3-u^2+14u-60=0$. Observăm că $u=3$ este soluție. $(27-9+42-60=0)$

Schema lui Horner:

	u^3	u^2	u^1	u^0
	1	−1	14	−60
3	1	2	20	0

$\Rightarrow (u-3)(u^2+2u+20)=0$ $\quad \Delta = 4-80<0 \Rightarrow$ nu sunt alte soluții reale.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x}=3 \Rightarrow x=27$. Verifică și condiția $x\in[11,\infty)$.

Verificăm sol: $\sqrt[3]{27}+\sqrt{27-11}=7 \Leftrightarrow 3+4=7$ adevarat.

(Met II: $u^3-u^2+14u-60 = u^3-3u^2+3u^2-u^2+14u-60 = u^2(u-3)+2u^2-6u+6u+14u-60=$
$=u^2(u-3)+2u(u-3)+20(u-3)=(u-3)(u^2+2u+20)$.)

(8) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $e^x-a=\ln(x+a)$ nu are soluții reale.

Sol $x+a>0 \Rightarrow x\in(-a,\infty)$ cond. de existență a ln.

Definim $f(x)=e^x-a$ și $g(x)=\ln(x+a)$.

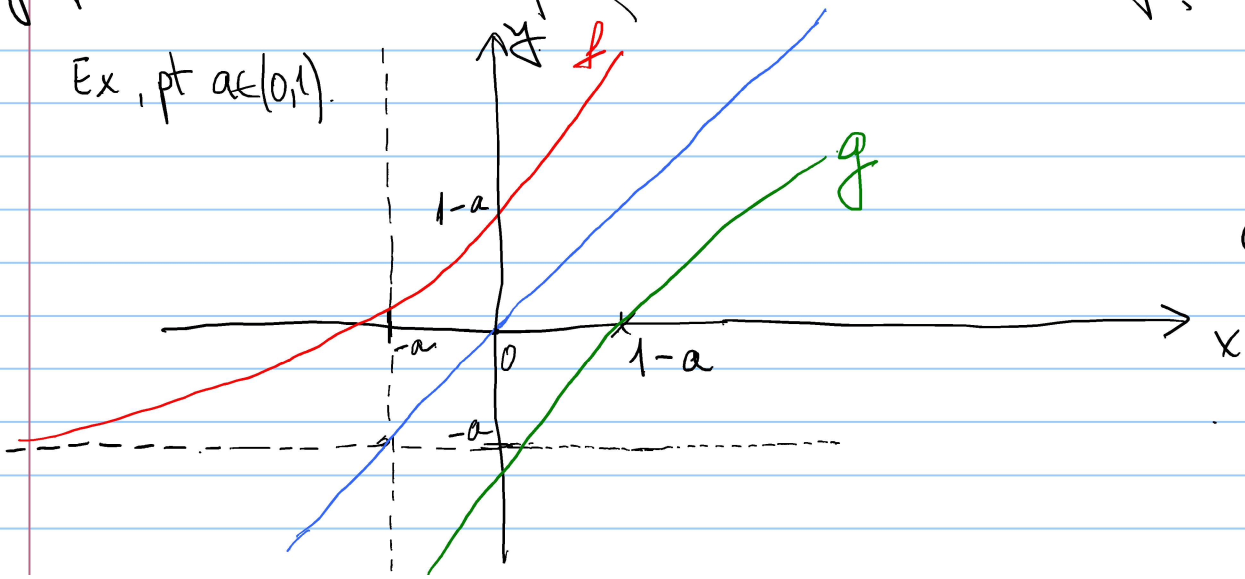
Observăm: $f(g(x)) = e^{g(x)} - a = e^{\ln(x+a)} - a = x + a - a = x.$

$g(f(x)) = \ln(f(x)+a) = \ln(e^x - a + a) = \ln e^x = x.$ $\Rightarrow$

$\boxed{g = f^{-1}}$; $g : (-a, \infty) \to \mathbb{R}$; $f : \mathbb{R} \to (-a, +\infty)$.

$\Rightarrow$ graficele celor două funcții sunt simetrice față de prima bisectoare.

Ex, pt $a \in (0,1)$.



Ec. nu are soluție $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ fiecare grafic "rămâne de aceeași parte" a primei bisect. (nu o intersectează)

Studiem ecuația $f(x)=x$ (intersecția graficului lui f cu prima bisectoare).

$\Rightarrow$ ecuația $e^x - a = x \iff e^x - x = a$. Definim $h(x)=e^x - x$; $h'(x)=e^x-1$.

	$-\infty$				0			∞
$h'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^x - x$	∞		$\searrow$		1		$\nearrow$	$+\infty$

$h'(x)=0 \iff x=0$.

$h(0)=e^0-0=1$.

Dacă $a<1 \Rightarrow$ ec. $e^x-x=a$ nu are sol. reale $\Rightarrow$ graficul lui f nu intersectează prima bisectoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. dată nu are soluție.

Răspuns: $a\in(-\infty,1)$.

9 (613) Ecuația $\sin x + p\cos x = 2p$, $p\in\mathbb{R}$ are soluții pentru ...

Sol: Trecem la $tg\frac{x}{2}$. Notăm $tg\frac{x}{2}=t \Rightarrow \frac{2t}{1+t^2}+p\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=2p$, $t\in\mathbb{R}$.

$2t + p - pt^2 = 2p + 2pt^2 \iff 3pt^2 - 2t + p = 0$ are soluție reală $\iff$

$\Delta \geq 0 \qquad \Delta = 4 - 4 \cdot 3p \cdot p = 4(1 - 3p^2).$

$\Rightarrow 1 - 3p^2 \geq 0 \iff 3p^2 \leq 1 \qquad p \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$

(verificăm $x = \pi \quad 0 - p = 2p \Rightarrow p = 0$ ✓).