Şiruri de numere reale

Conf. dr. Alina-Ramona Baias   Prof. dr. Dorian Popa

April 9, 2025

1 Noţiuni teoretice

Definiţie 1 *Se numeşte şir de numere reale o funcţie* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Punând $a_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, *şirul se notează prin* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sau* (a_n).

Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ se numeşte :
- **mărginit** dacă există $M \geq 0$ astfel încât $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- **crescător (descrescător)** dacă $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- **monoton** dacă este crescător sau descrescător.

1.1 Criterii utile în calculul limitelor de şiruri

Reamintim aici câteva criterii importante în calculul limitelor de şiruri.

Teoremă 1 (Criteriul raportului) *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere strict pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci:*

1) *dacă* $l < 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2) *dacă* $l > 1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
3) *dacă* $l = 1$, *criteriul nu este eficient.*

Teoremă 2 (Criteriul cleştelui) *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ *şiruri de numere reale cu proprietatea*

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n \geq n_0.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$.

Teoremă 3 (Stolz-Cesaro I) *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şiruri de numere reale cu proprietăţile:*
1) $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict monoton şi nemărginit*;
2) *există limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$;
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teoremă 4 (Stolz-Cesaro II) *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şiruri de numere reale cu proprietăţile:*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;
2) $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict monoton*;
3) *există limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$;
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Teoremă 5 (Consecinţa Teoremei lui Stolz-Cesaro) *Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, un şir de numere strict pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Următorul rezultat poate fi util pentru rezolvarea unor probleme în care criteriul raportului nu este eficient.

Teoremă 6 (Pr. 539) *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n < 1.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Următorul rezultat se poate folosi în studiul monotoniei şirurilor definite prin relaţii de recurenţă.

Teoremă 7 *Fie $f : I \to I$, $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir definit prin relaţia*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, x_o \in I.$$

Atunci:

i) Dacă f este crescătoare $\Longrightarrow$ $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton;

ii) Dacă f este descrescătoare $\Longrightarrow (x_{2n})_{n\geq 0}$, $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ sunt monotone şi au monotonie diferită.

Demonstraţie.

i) Presupunem $x_0 \leq x_1 \overset{f cresc.}{\Longrightarrow} f(x_0) \leq f(x_1) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \overset{f cresc.}{\Longrightarrow} f(x_1) \leq f(x_2) \Longleftrightarrow x_2 \leq x_3, \ldots$.

Deci $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$, prin urmare şirul este crescător.

Dacă $x_0 \geq x_1$, analog rezultă că şirul (x_n) este descrescător.

ii) Avem

$$\begin{aligned} x_{2n} &= f(x_{2n-1}) = f(f(x_{2n-2})) = (f \circ f)\,(x_{2n-2}),\ n \geq 1, \\ x_{2n+1} &= f(x_{2n}) = f(f(x_{2n-1})) = (f \circ f)\,(x_{2n-1}),\ n \geq 1. \end{aligned}$$

Cum $g = f \circ f$ este crescătoare, concluzia rezultă din i). Să presupunem că $(x_{2n})_{n\geq 0}$ este crescător $\Longrightarrow x_{2n} \leq x_{2n+2}$, $n \geq 0 \Longrightarrow f(x_{2n}) \geq f(x_{2n+2}) \Longrightarrow (x_{2n+1}) \geq x_{2n+3}$, $n \geq 0 \Longrightarrow (x_{2n+1})_{n\geq 0}$ este descrescător. Analog pentru $(x_{2n})_{n\geq 0}$ descrescător.

■

Următorul rezultat este util în studiul ecuaţiilor.

Propoziţie 1.1 *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie strict convexă. Atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel mult două rădăcini reale.*

Demonstraţie. Presupunem că ecuaţia $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Atunci $\exists t \in (0,1)$ astfel încât $x_2 = (1-t)x_1 + tx_3$. Deci:

$$0 = f(x_2) = f((1-t)x_1 + tx_3) < (1-t)f(x_1) + tf(x_3) = 0,\ \text{contradicţie.}$$

■

1.2 Şiruri remarcabile

1) Şirul $(e_n)_{n\geq 1}$,
$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
este strict crescător şi are limita e ($e \simeq 2,71828...$).

2) Şirul $(E_n)_{n\geq 1}$,
$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
este strict crescător şi are limita e.

3) Şirul $(\gamma_n)_{n\geq 1}$,
$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$
este strict descrescător şi mărginit inferior. Limita sa notată cu γ se numeşte **constanta lui Euler** ($\gamma \simeq 0,577...$).

Are loc dubla inegalitate:
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2 Exerciţii şi probleme

Ex. 1 *Calculaţi:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n n!}{2^n n^n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{n2^n+k}$; *(pr. 273 Culegere)*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{kC_n^k}{n2^n+k}$; *(pr. 274 Culegere)*

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \arcsin \frac{k}{n^2}$; *(pr. 277 Culegere)*

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a+\sqrt{a}+\cdots+\sqrt[n]{a}-n}{\ln n}, a>0$; *(pr. 269 Culegere)*

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}}{\ln^2 n}$; *(pr. 306 Culegere)*

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$; *(pr. 291 Culegere)*

h) $\lim\limits_{n\to\infty} (2-\sqrt[n]{2})^n$; *(pr. 292 Culegere)*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (2-\sqrt{2})(2-\sqrt[3]{2})\cdots(2-\sqrt[n]{2})$. *(pr. 293 Culegere)*

Ex. 2 (Pr. 294 Culegere) *Fie $a\in\mathbb{R}$ astfel încât şirul $(x_n)_{n\geq 1}$,*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) - a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

să fie mărginit. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ex. 3 (Pr. 246-247 Culegere) *Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}, \quad n\geq 1, x_0 = 1.$$

Să se calculeze: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Ex. 4 (Pr. 281-285 Culegere) *Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 1, \quad x_0\in\mathbb{R}.$$

a) *Determinaţi $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât şirul (x_n) să fie constant.*

b) *Determinaţi $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât şirul (x_n) să fie crescător.*

c) *Dacă $x_0>0$ calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

d) *Determinaţi $x_0\in\mathbb{R}$ astfel încât şirul (x_n) să fie convergent.*

e) *Dacă $x_0=-1$ calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.*

Ex. 5 *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} - ax_n + 2 = 0, \quad x_0 = a.$$

Să se determine a astfel încât şirul (x_n) *să fie strict descrescător.*

Ex. 6 (Admitere 2022) *Fie sirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin*

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}, \quad n \geq 0.$$

a) Determinaţi x_1.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{|x_n|}$.

Ex. 7 (Admitere 2019) *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

a) Dacă $x_{100} = 1$ *determinaţi* x_0.

b) Să se determine x_0 *astfel încât şirul* (x_n) *să fie convergent.*

c) Dacă $x_0 = \frac{1}{2}$ *calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Ex. 8 (Simulare 2021) *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + 2^{-x_n} \quad \textit{pentru oricen} \geq 0, \; x_0 = 0.$$

a) Determinaţi x_1.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$.

3 Indicaţii şi răspunsuri

Solutie Ex. 1 *a) Notăm* $a_n = \frac{5^n n!}{2^n n^n}$, $n \geq 1$. *Avem*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)!}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{2^n n^n}{5^n n!}\\ &= \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}\\ &= \frac{5}{2e} < 1\end{aligned}$$

Prin urmare avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *conform criteriului raportului.*

b) Notăm $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{C_n^k}{n2^n+k} = \frac{C_n^0}{n2^n} + \frac{C_n^1}{n2^n+1} + \cdots + \frac{C_n^n}{n2^n+n}$. *Avem*

$$\begin{aligned}\frac{C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n}{n2^n+n} &\leq x_n \leq \frac{C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n}{n2^n}\\ \frac{2^n}{n2^n+n} &\leq x_n \leq \frac{2^n}{n2^n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Aplicând criteriul cleştelui obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) Notăm $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kC_n^k}{n2^n+k} = \frac{C_n^1}{n2^n+1} + \frac{2C_n^2}{n2^n+2} + \cdots + \frac{nC_n^n}{n2^n+n}$. *Avem*

$$\begin{aligned}\frac{C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n}{n2^n+n} &\leq x_n \leq \frac{C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n}{n2^n}\\ \frac{n2^{n-1}}{n2^n+n} &\leq x_n \leq \frac{n2^{n-1}}{n2^n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Aplicând criteriul cleştelui obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

d) Notăm

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\arcsin\frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\arcsin\frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}}\cdot\frac{k}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Avem

$$\min_{1\le k\le n}\frac{\arcsin\frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}}\cdot\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\le x_n\le\max_{1\le k\le n}\frac{\arcsin\frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}}\cdot\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$\min_{1\le k\le n}\frac{\arcsin\frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2n^2}\le x_n\le\max_{1\le k\le n}\frac{\arcsin\frac{k}{n^2}}{\frac{k}{n^2}}\cdot\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Aplicând criteriul cleştelui obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

e) Fie $a_n=a+\sqrt{a}+\cdots+\sqrt[n]{a}-n$ *şi* $b_n=\ln n$. *Cum* $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$ *(*(b_n) *este strict crescător şi nemărginit), studiem existenţa limitei*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\sqrt{a}+\cdots+\sqrt[n+1]{a}-n-1-a-\sqrt{a}-\cdots-\sqrt[n]{a}+n}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{a}-1}{\ln\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-1}{\frac{1}{n+1}}\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\ln a.$$

Deci, conform teoremei Stolz-Cesaro, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a+\sqrt{a}+\cdots+\sqrt[n]{a}}{\ln n}=\ln a$.

f) Fie $a_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}$ *şi* $b_n=\ln^2 n$. *Cum* $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$ *(*(b_n) *strict crescător şi nemărginit), studiem existenţa limitei*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\ln^2(n+1)-\ln^2 n}==\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+\ln n}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln(\frac{n+1}{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}\cdot\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Deci, conform teoremei Stolz-Cesaro, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}}{\ln^2 n}=\frac{1}{2}$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$.

h) $\lim\limits_{n\to\infty}(2-\sqrt{2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+(1-\sqrt[n]{2}))^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}}=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$.

i) Notăm $x_n=(2-\sqrt{2})(2-\sqrt[3]{2})\cdots(2-\sqrt[n]{2})$. *Deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$, *calculăm limita*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}(2-\sqrt[n+1]{2})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-\sqrt[n+1]{2})^{n+1}}{2-\sqrt[n+1]{2}}\overset{h)}{=}\frac{1}{2}<1.$$

Deci conform Teoremei 6, avem $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Solutie Ex. 2 *Avem* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \gamma_n + \ln n$, *deci şirul* (x_n) *poate fi exprimat cu ajutorul şirului* (γ_n) *astfel:*

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - a(\gamma_n + \ln n)\\
x_n &= (\gamma_{2n} + \ln 2n) - \frac{1}{2}(\gamma_n + \ln n) - a(\gamma_n + \ln n)\\
&= \gamma_{2n} - \frac{1}{2}\gamma_n - a\gamma_n + \ln 2n - \frac{1}{2}\ln n - a\ln n\\
&= \gamma_{2n} - \frac{1}{2}\gamma_n - a\gamma_n + \ln 2 + (\frac{1}{2} - a)\ln n.
\end{aligned}$$

Deoarece (x_n) *este mărginit rezultă* $\frac{1}{2} - a = 0$ *deci* $a = \frac{1}{2}$, *iar* $\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 2$.

Solutie Ex. 3 *a)* $x_0 = 1 > 0 \Longrightarrow x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Avem $x_{n+1} - x_n = \frac{2}{x_n} > 0 \Longrightarrow (x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător, prin urmare există* $\lim_{n\to\infty} x_n = x, x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă presupunem $x \in \mathbb{R}$, *atunci trecând la limita în relaţia de recurenţă obţinem*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \Longleftrightarrow x = x + \frac{2}{x} \Longleftrightarrow 0 = \frac{2}{x} \text{ (fals)},$$

deci $x = +\infty$.

b) Fie $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{x_n^2}{n}}$. *Avem*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n} &\stackrel{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}\left((x_n + \frac{2}{x_n})^2 - x_n^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{4}{x_n}\right) = 4 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 2.
\end{aligned}$$

Solutie Ex. 4 *a) Din* $x_0 = x_1 \Longrightarrow x_0 = e^{x_0} - 1$, *cu soluţia* $x_0 = 0$. *Dacă* $x_0 = 0 \Longrightarrow x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $x_{n+1} - x_n = e^{x_n} - x_n - 1 \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se arată că* $e^x - x - 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *cu egalitate dacă şi numai dacă* $x = 0$. *Deci* (x_n) *este crescător* $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

c) *Din* (x_n) *crescător rezultă că există* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$. *Dacă presupunem* $x \in \mathbb{R}$ *atunci, trecând la limita în relaţia de recurenţă obţinem* $x = e^x - 1 \Longrightarrow x = 0$, *contradicţie cu* $x_0 > 0$. *Deci* $x = +\infty$.

d) *Dacă* $x_0 = 0 \Longrightarrow x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *deci* (x_n) *convergent. Dacă* $x_0 < 0 \Longrightarrow x_1 = e^{x_0} - 1 < 0$ *şi prin inducţie rezultă* $x_n < 0$. *Şirul* (x_n) *este crescător şi mărginit superior de* 0, *deci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. *Deci şirul este convergent* $\Longleftrightarrow x_0 \leq 0$.

e) *Avem*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \overset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^{x_n}-1} - \frac{1}{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(e^{x_n}-1)x_n}{x_n - e^{x_n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n - e^{x_n} + 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n - e^{x_n} + 1} \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x - e^x + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1 - e^x} = -2.
\end{aligned}$$

Solutie Ex. 5 *Dacă* $a = 0 \Longrightarrow x_{n+1} = -2$, $n \geq 0$, *nu convine. Fie in continuare* $a \neq 0$, $f(x) = ax - 2$, $x \in \mathbb{R}$. *Atunci*

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, x_0 = a.$$

Dacă $a > 0 \Longrightarrow f$ *strict crescătoare* $\overset{T7}{\Longrightarrow}$ *Şirul este strict descrescător* $\Longleftrightarrow x_0 > x_1 \Longleftrightarrow a > a^2 - 2 \Longleftrightarrow a^2 - a - 2 < 0 \Longleftrightarrow a \in (-1, 2)$ *dar* $a > 0$ *deci* $a \in (0, 2)$. *Cazul* $a < 0$ *nu convine pentru că* (x_{2n}), (x_{2n+1}) *au monotonii diferite conform teoremei 7.*

Solutie Ex. 6 *a)* *Inlocuind în sumă obţinem* $x_1 = \frac{0-1}{0!} + \frac{1-1}{1!} = -1$.

b) *Avem*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=-\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n!}\right)=0.$

c)

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{|x_n|}=\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

Pentru calculul acestei limite aplicăm Consecinţa Teoremei lui Stolz-Cesaro (Teorema 5) astfel

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e.$$

Solutie Ex. 7 *a)* *Din relaţia de recurenţă avem:*

$$x_{100}=x_{99}-x_{99}^2 \Longleftrightarrow x_{99}^2-x_{99}+1=0,\ \textit{deci } x_{99}\notin\mathbb{R}.$$

Prin urmare nu există $x_0\in\mathbb{R}$ *astfel încât* $x_{100}=1$.

b) $x_{n+1}-x_n=-x_n^2\le 0 \Longrightarrow (x_n)$ *descrescător* $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\in\overline{\mathbb{R}}$. *Dacă* (x_n) *este convergent* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, *prin trecere la limita în relaţia de recurenţă.*

Dacă $x_0<0$, *întrucât* $x_n\le x_0,\ \forall n\ge 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

Dacă $x_0>1 \Longrightarrow x_1<0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty \Longrightarrow$ *Şirul este convergent pentru* $x_0\in[0,1]$ *fiind monoton şi mărginit.*

c) *Pentru a calcula* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ *aplicăm consecinţa teoremei lui Stolz-Cesaro şi avem* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)=1$, *deci* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$.

Solutie Ex. 8 *a)* *Din relaţia de recurenţă obţinem* $x_1=x_0+2^{-x_0}=1$.

b) $x_{n+1} - x_n = 2^{-x_n} > 0 \Longrightarrow (x_n)$ *strict crescător* $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dacă (x_n) *este convergent prin trecere la limită obţinem* $l = l + 2^{-l} \Longleftrightarrow 2^{-l} = 0$ *(fals), deci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

c) *Pentru a calcula* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n}$ *aplicăm teorema lui Stolz-Cesaro şi avem*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\ln(n+1) - \ln n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-x_n}}{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n2^{-x_n}}{\ln(1 + \frac{1}{n})^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{x_n}} \overset{Stolz}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{x_n + 2^{-x_n}} - 2^{x_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-x_n}}{2^{2^{-x_n}} - 1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{2^{-x_n}} - 1}{2^{-x_n}} \right)^{-1} = \log_2 e.
\end{aligned}$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\ln n} = \log_2 e$.