

Funcția de gradul al doilea. Numere complexe. Progresii aritmetice și geometrice

Conferențiar Dr. Mat. Luminița-Ioana Cotîrlă

Notiuni teoretice: 1.Funcția de gradul al doilea

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

- Graficul funcției de gradul al II-lea este o parabolă cu vârful $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Graficul funcției de gradul al II-lea are axa de simetrie dreapta $x = -\frac{b}{2a}$.
- Dacă $a < 0$ funcția admite un maxim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ în $x = -\frac{b}{2a}$.
- Dacă $a > 0$ funcția admite un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ în $x = -\frac{b}{2a}$.
- Graficul funcției f este situat deasupra axei $X'OX$ dacă și numai dacă $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- Graficul funcției f este situat sub axa $X'OX$ dacă și numai dacă $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- Dacă $a > 0$ atunci $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$
- Dacă $a < 0$ atunci $f(\mathbb{R}) = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$
- Relațiile lui Viète
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Poziția rădăcinilor ecuației $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, \Delta \geq 0$, x_1, x_2 rădăcinile, $\alpha \in \mathbb{R}$ dat:

1. $x_1 < \alpha, x_2 < \alpha$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases}$$

2. $x_1 > \alpha, x_2 > \alpha$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > \alpha \end{cases}$$

$$3. x_1 < \alpha < x_2$$

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) < 0 \end{cases}$$

- Pentru a impune ca o funcție de gradul II să aibă o singură rădăcină între α_1 și α_2 este suficientă condiția $f(\alpha_1)f(\alpha_2) < 0$.
- Poziția rădăcinilor față de 2 numere date α_1 și $\alpha_2 : x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha_1) < 0 \\ af(\alpha_2) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha_2 \end{cases}$$

2. Numere complexe

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ forma algebrică a numărului complex

$\bar{z} = x - iy$ conjugatul lui z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ modulul lui z

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ forma trigonometrică, unde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este raza polară și $\varphi = \arctan \frac{y}{x} + k\pi$ este argumentul redus al lui z ,

$$k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } z \text{ este în CI} \\ 1, & \text{dacă } z \text{ este în CII sau CIII} \\ 2, & \text{dacă } z \text{ este în CIV} \end{cases}$$

Fie $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.
Atunci

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \\ z^n &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \end{aligned}$$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$, $k = \overline{0, n-1}$ rădăcinile de ordin n ale lui z

Proprietăți pentru modulul unui număr complex:

$$|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Proprietăți pentru conjugatul unui număr complex:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

$$|z| = |\overline{z}|, \forall z \in \mathbb{C};$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C};$$

Observatie: $z \in \mathbb{R}$ daca si numai daca $\overline{z} = z$.

3. Progresii aritmetice și progresii geometrice

Spunem ca șirul de numere $a_1, a_2, \dots, a_n$ este o progresie aritmetică dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $a_{k+1} = a_k + r$, unde r este un număr constant, $r \neq 0$, numit rație.

- $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$
- $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1$
- $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \geq 2$, unde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice)

Spunem că șirul de numere $b_1, b_2, \dots, b_n$ este o progresie geometrică, dacă pentru orice $k \geq 1$ avem $b_{k+1} = b_k q$, unde q este un număr constant, $q \neq 0$, numit rație.

- $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \forall n \geq 2$
- $b_n = b_1 q^{n-1}, \forall n \geq 1$
- $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1, \forall n \geq 1$, unde $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ (suma primilor n termeni ai progresiei geometrice)

Funcția de gradul al II-lea. Probleme

Condiția ca ecuația de gradul al II-lea să aibă rădăcini reale: $\Delta \geq 0$

Problema 14. Fie funcțiile $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$, $m \in \mathbb{R}$.

Mulțimea valorilor parametrului m pentru care ecuația $f_m(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală este:

A) $(-\infty, 1)$ B) $(-\infty, 1]$ C) $\mathbb{R}$ D) alt răspuns E) $[0, \infty)$.

Rezolvare:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4(m^2 - 2m + 1) - 4m^2 + 4m \geq 0$$

$$-4m + 4 \geq 0$$

Deci $m \leq 1$ și avem răspunsul B) $m \in (-\infty, 1]$.

Problema 15.

Fie funcțiile $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m-1$, $m \in \mathbb{R}$.

Varfurile parabolilor asociate funcțiilor f_m , $m \neq 0$, se găsesc pe:

A) parabola $y = x^2 + 2$ B) dreapta $x + 2y = 0$ C) dreapta $y = x$ D) dreapta $y = -x$ D) o paralela la Ox .

Rezolvare:

Calculăm varful parabolei: $V\left(-\frac{m-1}{m}, \frac{m-1}{m}\right)$.

Deci $-x_V = y_V$ și varful se afla pe dreapta $y = -x$. Răspunsul este D).

Problema 87. Ecuația $x^4 + (2m-1)x^2 + 2m+2 = 0$, cu necunoscuta x și parametrul real m , are toate rădăcinile reale dacă:

A) $m = 0$ B) $1 \leq m \leq 2$ C) $-1 \leq m \leq -1/2$ D) $m \in \emptyset$ E) $m > 1/2$.

Rezolvare: Facem substituția $x^2 = t$ și ecuația devine

$$t^2 + (2m-1)t + 2m+2 = 0.$$

Pentru ca toate rădăcinile să fie reale avem următoarele condiții: $\Delta \geq 0$ și

$$\begin{cases} t_1 \geq 0 \\ t_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Din $\Delta \geq 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4(2m+2) \geq 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m - 7 \geq 0$. Soluția inecuației este $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{7}{2}, \infty)$.

Din relația (1) $\Rightarrow \begin{cases} -2m+1 \geq 0 \\ 2m+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -1 \end{cases} \Rightarrow m \in [-1, \frac{1}{2}]$.

Soluția problemei se obține intersectând cele două soluții: C) $m \in [-1, -\frac{1}{2}]$.

Semnul funcției de gradul al II-lea

Problemele 8, 9, 10.

Se da funcția $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m^2 - 1$, unde $m \neq 0$ este parametru real.

Problema 8 Pentru ce valori ale lui m , $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A) $m \in (0, +\infty)$ B) $m \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$ C) $m \in (0, 1 + \sqrt{2})$ D) $m \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ E) $m \in (-1, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$

Rezolvare:

Punem condițiile:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

Din prima inecuație obținem

$$4(m^2 + 2m + 1) - 4m(m^2 - 1) < 0$$

$$-m^3 + m^2 + 3m + 1 < 0$$

$$(m + 1)(-m^2 + 2m + 1) < 0$$

Deci $m \in (-1, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

Din $m > 0 \Rightarrow m \in (0, \infty)$. Intersectând cele doua soluții obținem B) $m \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

Problema 9 Pentru ce valori ale lui m , $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$?

A) $m \in (-\infty, 0)$ B) $m \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ C) $m \in (-1, 1 - \sqrt{2})$ D) $m \in (-\infty, 1 - \sqrt{2})$ E) $m \in (-1, 1 - \sqrt{2}) \cup (0, \infty)$

Rezolvare:

Punem condițiile:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

Din $\Delta < 0$ obținem $m \in (-1, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty)$. Din $m < 0$ obținem $m \in (-\infty, 0)$.

Prin intersecție avem C) $m \in (-1, 1 - \sqrt{2})$.

Problema 10 Pentru ce valori ale lui m funcția admite rădăcina dublă?

A) $m \in \{\pm 1\}$ B) $m \in \{1, \pm\sqrt{2}\}$ C) $m \in \{\pm\sqrt{2}\}$ D) $m \in \{-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ E) $m \in \{0, 1, \pm\sqrt{2}\}$

Rezolvare:

Punem condițiile: $m \neq 0$ și $\Delta = 0$. Deci răspunsul este D) $m \in \{-1, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.

Problema 84 Fie $E(x) = \frac{x^2 - 2(m-1)x + m+1}{mx^2 - mx + 1}$. Mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care E este bine definită oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, este:

A) $\mathbb{R}$ B) $\{4\}$ C) $\{-1\}$ D) $(0, 4)$ E) alt răspuns

Rezolvare:

Expresia de la numitor trebuie sa fie diferită de 0 și atunci avem pentru ecuația $mx^2 - mx + 1 = 0$ condiția $\Delta < 0$ din care obținem $m^2 - 4m < 0 \Rightarrow m \in (0, 4)$.

Dar observam că pentru $m = 0$ expresia de la numitor este diferită de 0. Atunci soluția de mai sus o reunim cu $\{0\}$.

Atunci avem $m \in (0, 4) \cup \{0\}$ și obținem $m \in [0, 4)$. Deci răspunsul este E) alt răspuns.

Problema 209 Imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}$, $a \in \mathbb{R}$, este inclusă în intervalul $[0, 2]$, dacă

A) $a \geq 3$ B) $a \leq -2$ C) $a \in [-1, 0)$ D) $a \in [0, 2]$ E) $a \in (-2, -1)$

Rezolvare:

$$0 \leq \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2.$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + ax + 1 - 2x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} \leq 0 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \geq 0. \end{cases}$$

Deoarece $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x^2 + (2 - a)x + 1 \geq 0 \\ x^2 + ax + 1 \geq 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} \Delta_1 = (2 - a)^2 - 4 \leq 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 4a \leq 0 \\ a^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [0, 2]$. Deci răspunsul este D).

Problemele 75, 76 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - (m - 1)x + 3m - 4, \quad m \in \mathbb{R}.$$

75 Mulțimea valorilor lui m pentru care f se anulează în $(0, 1)$ și $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, 1)$ este:

A) $(-\infty, 7 - 4\sqrt{2})$ B) $(7 + 4\sqrt{2}, \infty)$ C) $\{7 - 4\sqrt{2}, 7 + 4\sqrt{2}\}$ D) $\{7 - 4\sqrt{2}\}$ E) $\emptyset$

Rezolvare:

f se anulează în $(0, 1)$ dacă există cel puțin un punct $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Pentru ca $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, 1)$ înseamnă că vârful parabolei asociate se afla pe axa OX .

Deci $\Delta = 0$. Obținem $m^2 - 14m + 17 = 0$ și $\Delta_m = 128 \Rightarrow m_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{2}$.

Varful parabolei are coordonatele $x_V = \frac{-b}{2a}$, $y_V = 0$. Punem condiția $x_V \in (0, 1)$.

Soluția $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{m-1}{2}$. Pentru $m_1 = 7 + 4\sqrt{2}$ obținem $x_V = 3 + 2\sqrt{2} > 1$, deci $x_V \notin (0, 1)$.

Pentru $m_2 = 7 + 4\sqrt{2}$ obținem $x_V = 3 - 2\sqrt{2} \in (0, 1)$. Deci răspunsul este D) $\{7 - 4\sqrt{2}\}$.

76 Mulțimea valorilor lui m pentru care $f(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$ este
A) $(0, 1)$ B) $(2, \infty)$ C) $(-\infty, 1]$ D) $\emptyset$ E) $(0, \infty)$

Rezolvare: Pentru ca f are semn contrar lui a pe intervalul $(0, 1)$ rezulta ca f taie axa OX in doua puncte: x_1 si x_2 . Ne convine doar cazul $x_1 \leq 0$ si $x_2 \geq 1$. Dar in acest caz $f(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$. Trebuie să punem condițiile:

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$$

Deci $m \leq \frac{4}{3}$ și $m \leq 1$ și obținem soluția C) $(-\infty, 1]$.

Relațiile lui Viete

Problemele 11, 12, 13

Se consideră ecuația $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$, iar x_1 și x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuației.

11 Suma rădăcinilor $x_1 + x_2$ aparține intervalului

A) $[0, 1]$ B) $[0, 4]$ C) $\mathbb{R}$ D) $[0, 2]$ E) $[-1, 4]$

Rezolvare:

Pentru a avea două rădăcini reale avem condiția $\Delta \geq 0 \Rightarrow -4m^2 + 16m \geq 0$.
Deci B) $m \in [0, 4]$.

12 Suma pătratelor rădăcinilor $x_1^2 + x_2^2$ aparține intervalului

A) $[0, 4]$ B) $[-2, 4]$ C) $[0, 8]$ D) $\mathbb{R}$ E) $[0, 3]$

Rezolvare:

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = m^2 - (m^2 - 2m) = 2m.$$

Din problema de mai sus avem ca $m \in [0, 4] \Rightarrow 2m \in [0, 8]$. Deci răspunsul este C) $[0, 8]$.

13 Produsul rădăcinilor $x_1 x_2$ aparține intervalului

A) $[-2, 0]$ B) $[0, 4]$ C) $[-1/2, 4]$ D) $\mathbb{R}$ E) $(0, 2)$

Rezolvare:

$$x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2m}{2} = \frac{1}{2}m^2 - m. \text{ Trebuie gasit minimul si maximul expresiei } \frac{1}{2}m^2 - m.$$

Notăm $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(m) = \frac{1}{2}m^2 - m$. Minimul este atins in varf $y_V = -\frac{\Delta_m}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$, pentru ca $x_V = 1 \in [0, 4]$.

Calculăm $f(0) = 0, f(1) = -\frac{1}{2}$ și $f(4) = 4$. Varful parabolei este $V(-\frac{1}{2}, 1)$. Deci $\frac{1}{2}m^2 - m \in [-1/2, 4]$.

Răspunsul este C) $[-1/2, 4]$.

Problema 734

Se considera familia de funcții $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - (4m + 3)x + 4m + 2$, $m \in \mathbb{R}$.

Punctul din plan prin care trec toate graficele funcțiilor f_m este situat pe:

A) axa Oy B) axa Ox C) prima bisectoare D) a doua bisectoare E) alt raspuns

Rezolvare:

Fie $M(x_0, y_0)$ punctul prin care trec parabolele. Atunci

$$x_0^2 - (4m + 3)x_0 + 4m + 2 = y_0.$$

Ordonând după puterile lui m obținem

$$m(-4x_0 + 4) + x_0^2 - 3x_0 + 2 - y_0 = 0.$$

Pentru $m = 0 \Rightarrow x_0^2 - 3x_0 + 2 - y_0 = 0$ și $m(-4x_0 + 4) = 0, \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$-4x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$x_0^2 - 3x_0 + 2 - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Deci am obținut $M(1, 0) \in Ox$ și răspunsul corect este B).

Numere complexe**Egalitatea a două numere complexe**

Problema 143 Ecuația $x^3 - (4 - i)x^2 - (1 + i)x + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, are o rădăcină reală dacă și numai dacă a aparține mulțimii:

A) $\{1, 2\}$ B) $\{0, 1\}$ C) $\{-1, 4\}$ D) $\{0, 4\}$ E) $\mathbb{R}$

Rezolvare:

Fie x rădăcină reală a ecuației. Atunci $x^3 - (4 - i)x^2 - (1 + i)x + a = 0$ și $x^3 - 4x^2 - x + a + i(x^2 - x) = 0$.

Cum $x \in \mathbb{R}$ obținem $x^2 - x = 0$ și obținem $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$. Pentru $x_1 = 0$ avem $a_1 = 0$ și pentru $x_2 = 1$ avem $a_2 = 4$. Deci răspunsul este D) $\{0, 4\}$.

Problema 21 Să se găsească numărul complex z dacă $|z| - z = 1 + 2i$.

A) $z = \frac{3}{2} - 2i$ B) $z = \frac{3}{2} + 2i$ C) $z = \frac{1}{2} - 3i$ D) $z = \frac{1}{2} + 3i$ E) $z = -\frac{1}{2} + 3i$

Rezolvare:

Fie $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ un număr complex. Înlocuim în ecuație și obținem

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i.$$

Deci

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Obținem $x = \frac{3}{2}$ și $y = -2$, deci răspunsul este A) $z = \frac{3}{2} - 2i$.

Conjugatul numărului complex

Problemele 167, 168, 169

Fie numărul complex $z = 1 + i$.

166 Numărul complex $\frac{1}{z}$ este:

A) $-1 - i$ B) $1 - i$ C) $\frac{1-i}{2}$ D) $\frac{1+i}{2}$ E) Alt răspuns

Rezolvare:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

Deci răspunsul este C) $\frac{1-i}{2}$.

167 Dacă z^n este real, pentru o anumite valoare $n \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul complex z^{2n} este:

A) i^n B) -1 C) 1 D) 2^n E) $(\sqrt{2})^n$

Rezolvare:

$$z^n = \bar{z}^n \Rightarrow \frac{z^n}{\bar{z}^n} = 1 \Rightarrow \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^n = 1.$$

Amplificăm cu z și folosim $z\bar{z} = 2$ obținem $\left(\frac{z^2}{2}\right)^n = 1$. Deci $z^{2n} = 2^n$ și răspunsul este D) 2^n .

168 Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dacă $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ și $|z_1| = |z_2| = 1$, atunci $|z_1 - z_2|$ este:

A) 2 B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3} - 1$.

Rezolvare: Folosim identitatea paralelogramului

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4$$

Deci $|z_1 - z_2| = 1$ și răspunsul este B) 1 .

Problema 662 Câte rădăcini complexe are ecuația $z^{n-1} = i\bar{z}$, $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$?

A) $n - 2$ B) $n - 1$ C) n D) $n + 1$ E) $n + 2$.

Rezolvare:

Trecem la module $\Rightarrow |z|^{n-1} = |i| |\bar{z}| = |z|$.

Deci $|z|^{n-1} - |z| = 0 \Rightarrow |z|(|z|^{n-2} - 1) = 0$.

1) $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ verifică ecuația inițială

2) $|z| \neq 0 \Rightarrow |z|^{n-2} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Înmulțim ecuația inițială cu $z \neq 0$ și avem

$$z^n = i\bar{z}z = i|z|^2 = i \cdot 1 = i$$

Ecuația binomă $z^n = i$ are n soluții. Deci răspunsul este D) $n + 1$.

Progresii

Problema 142 O progresie aritmetică crescătoare $(a_n)_{n \geq 1}$ verifica relațiile $a_9 + a_{10} + a_{11} = 15$ și $a_9 a_{10} a_{11} = 120$. Suma primilor 20 de termeni din progresie este:

A) 150 B) 100 C) 120 D) 110 E) 160.

Rezolvare:

$$\text{Din } a_9 + a_{10} + a_{11} = 15 \Rightarrow a_{10} - r + a_{10} + a_{10} + r = 15 \Rightarrow a_{10} = 5$$

$$\text{Din } a_9 a_{10} a_{11} = 120 \Rightarrow (a_{10} - r) a_{10} (a_{10} + r) = 120 \Rightarrow (5 - r) 5(5 + r) = 120 \Rightarrow r^2 = 1.$$

Deci $r = 1$, $S_{20} = 110$ și răspunsul este D) 110.

Problema 219 Fie m, n, p numere naturale nenule, $m \neq n$. Dacă într-o progresie aritmetică avem $a_n = m$, și $a_m = n$, atunci a_p este egal cu:

A) $m + n - p$ B) $p - m - n$ C) $m + n - 2p$ D) $2p - m - n$ E) $m + n + p$.

Rezolvare:

Avem $a_n = a_1 + (n - 1)r$ și $a_m = a_1 + (m - 1)r$. Scăzând cele două relații obținem

$$a_n - a_m = (n - m)r \Rightarrow r = \frac{a_n - a_m}{n - m}.$$

Deci $r = \frac{m - n}{n - m} \Rightarrow r = -1$ și putem afla a_1 :

$$a_n = a_1 + 1 - n \Rightarrow a_1 = m + n - 1.$$

Atunci $a_p = a_1 + (p - 1)(-1)$ și $a_p = m + n - p$. Răspunsul este A) $m + n - p$.

Problema 34 Sa se determine primul termen a_1 și rația q a unei progresii geometrice $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dacă:

$$\begin{cases} a_4 - a_2 = 6, \\ a_3 - a_1 = 3. \end{cases}$$

A) $a_1 = -1; q = 3$ B) $a_1 = 3; q = \frac{1}{2}$ C) $a_1 = 2; q = -2$ D) $a_1 = 1; q = 2$ E) $a_1 = 1; q = 3$.

Rezolvare:

$$a_4 - a_2 = a_1 q^3 - a_1 q = a_1 q(q^2 - 1) = 6$$

$$a_3 - a_1 = a_1 q^2 - a_1 = a_1 (q^2 - 1) = 3$$

Prin împărțirea relațiilor $\Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_1(2^2 - 1) = 3 \Rightarrow a_1 = 1$. Deci răspunsul este D) $a_1 = 1; q = 2$.