Limite de funcţii. Continuitate

Lect. Alexandru Orzan

15.03.2025

Problema 310

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x^{x^2}}{(1-x)^2}$ este:

Soluţie: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x^{x^2}}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{x^2}(x^{x-x^2}-1)}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x \to 1} x^{x^2} \cdot \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{x-x^2}-1}{(1-x)^2} \overset{x^{x^2} \to 1}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{x-x^2}-1}{(1-x)^2} =$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{(x-x^2)\ln x}-1}{(1-x)^2} = L$. Cum $\lim\limits_{x \to 1}(x-x^2)\ln x = 0$, în ultima limită vom folosi limita remarcabilă

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1. \tag{1}$$

Avem deci că $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{(x-x^2)\ln x}-1}{(x-x^2)\ln x} \cdot \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-x^2)\ln x}{(1-x)^2} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-x^2)\ln x}{(1-x)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x \ln x}{1-x} =$ $\lim\limits_{x \to 1} x \cdot \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1-x} \overset{x \to 1}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1-x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{x \to 1} -\dfrac{1}{x} = -1$.

Problema 311

$\lim\limits_{x \to +0} ((1+x)^x - 1)^x$ este:

Soluţie: Avem o nedeterminare de tipul 0^0, prin urmare scriem limita iniţială ca

$$e^{\lim\limits_{x \to +0} x \ln((1+x)^x - 1)}$$

iar exerciţiul se reduce la a calcula limita $L = \lim\limits_{x \to +0} x \ln((1+x)^x - 1)$.

Observăm că $L = \lim\limits_{x \to +0} x \ln(e^{x\ln(1+x)} - 1) = \lim\limits_{x \to +0} x \ln\left(\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x\ln(1+x)} \cdot x\ln(1+x)\right) =$ $= \lim\limits_{x \to +0} x \ln\left(\dfrac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x\ln(1+x)}\right) + \lim\limits_{x \to +0} x \ln(x \ln(1+x)) = L_1 + L_2$.

Cum $\lim\limits_{x \to +0} x\ln(1+x) = 0$, ţinând cont de (1), obţinem că $L_1 = 0$. Rămâne aşadar să calculăm L_2.

$L_2 = \lim\limits_{x \to +0} (x\ln(x) + x\ln(\ln(1+x))) = \lim\limits_{x \to +0} x\ln(x) + \lim\limits_{x \to +0} x \ln(\ln(1+x)) = L_3 + L_4$.

Punând $x = \dfrac{1}{t}$, limita L_3 devine $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\ln \frac{1}{t}}{t} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{-\ln t}{t} = 0$.

$L_4 = \lim\limits_{x \to +0} x \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} \cdot x\right) = \lim\limits_{x \to +0} x \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right) + \lim\limits_{x \to +0} x\ln(x) \overset{L_3=0}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+0} x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 0$, unde am folosit limita remarcabilă

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1. \qquad (2)$$

În final obţinem că limita iniţială este 1.

Problema 322

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

Soluţie: Punem $x = \frac{1}{t}$, iar limita se reduce la $\lim\limits_{t\to+0}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right)$ sau aducând la acelaşi numitor, $\lim\limits_{t\to+0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = L$. Observăm că ne plasăm în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, deci aplicăm regula lui l'Hospital de două ori şi obţinem:

$L = \lim\limits_{t\to+0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{t\to+0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{t\to+0}\frac{\frac{1}{(1+t)^2}}{2} = \frac{1}{2}.$

Problema 324

$\lim\limits_{x\to 0} xe^{-\frac{1}{x}}$

Soluţie: Demonstrăm că limita nu există. Pentru aceasta este suficient să determinăm două şiruri $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ cu termeni din $\mathbb{R}^*$, având limitele egale cu 0, pentru care limitele

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} x_n e^{-\frac{1}{x_n}} \quad \text{şi} \quad L_2 = \lim_{n\to\infty} y_n e^{-\frac{1}{y_n}}$$

sunt diferite. Fie deci $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = \frac{1}{n}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}, y_n = -\frac{1}{n}$. Atunci avem că

$L_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{ne^n} = 0$ iar $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{e^n}{n} = -\infty$, deci concluzia se impune.

Problema 328

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

Soluţie: Aducem la acelaşi numitor iar limita devine $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1 - \sin x}{\sin x\cdot(e^x-1)}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}$, folosind (1) şi limita remarcabilă

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1. \tag{3}$$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}$, observăm că avem cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, deci aplicăm regula lui l'Hospital şi obţinem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{x^2}\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{2x}\overset{\text{l'Hospital}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Problema 329

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-x}{x^3}$$

Soluţie: Exerciţiul are la bază două limite asemănătoare, anume

$$\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y-y}{y^3}=\frac{1}{3}\quad\text{şi}\quad\lim_{y\to 0}\frac{\sin y-y}{y^3}=-\frac{1}{6}, \tag{4}$$

pe care le vom folosi în vederea calculării limitei iniţiale. În acest sens, observăm că

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin x+\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin x}{x^3}+$
$+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=L_1+L_2$. Din (4) avem că $L_2=-\frac{1}{6}$.

$L_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin x}{(\sin x)^3}\cdot\frac{(\sin x)^3}{x^3}\overset{(3)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin x}{(\sin x)^3}=$
$\overset{(4)}{=}\frac{1}{3}$ şi în concluzie limita iniţială este $\frac{1}{6}$.

Problema 331

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Soluţie: Scriem limita ca

$$e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)},$$

prin urmare avem de calculat $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)$. Observăm că

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Ultima limită este de tipul $\frac{0}{0}$, deci aplicăm regula lui l'Hospital şi obţinem: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$, de unde limita iniţială este $\frac{1}{\sqrt{e}}$.