
Lecție de pregătire
STRUCTURI ALGEBRICE (I)
15.03.2025

Structuri algebrice (I) [Teste grilă 2025]

$(A, \circ)$ structură algebrică, adică $\exists \overline{f}: A \times A \rightarrow A$
 $x \circ y = \overline{f}(x, y), \forall x, y \in A$
↳ „lege de compoziție” sau „operație binară”

11 Structuri algebrice ale mulțimilor cunoscute:

a) Grupuri (Monoidi)

$(G, \circ)$ $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ parte stabilă în raport cu „} \circ \text{”} \\ \text{asociativitate} \\ \left[\begin{array}{l} \text{element neutru:} \\ \exists e \in G \text{ a.î. } x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} \forall x \in G \exists x' \in G \text{ (simetricul lui } x) \\ \text{a.î. } x \circ x' = x' \circ x = e \end{array} \right] \end{array} \right.$

Semigrup

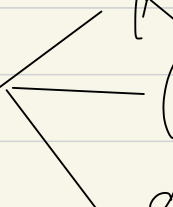
Monoid

Grup

Notatii: e = elementul neutru $\longrightarrow e_G$
multiplicativ: $(G, \cdot)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{elementul } n: e \stackrel{\text{not}}{=} 1 \in G \\ \text{simetricul} = \text{invers} \longrightarrow x^{-1} \end{array} \right.$
aditiv: $(G, +)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{elementul } n: e \stackrel{\text{not}}{=} 0 \in G \\ \text{simetricul} = \text{opus} \longrightarrow -x \end{array} \right.$

" $\circ$ " este comutativă $\iff \forall x, y \in G: x \circ y = y \circ x$

b) Inele $(I, +, \cdot)$  $(I, +)$ grup comutativ $(x+y = y+x)$
 $\forall x, y \in I$
 $(I, \cdot)$ monoid
distributivitatea „ $\cdot$ ” fata de „ $+$ ”

c) Corpuri $(K, +, \cdot)$  $(K, +)$ grup comutativ $(e_K = 0)$
 $(K^*, \cdot)$ grup $(K^* = K \setminus \{0\})$
distributivitate —||———.

Example: a) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ grupuri comutative

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$; $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; $(\mathbb{Q}, \cdot)$ —||—

$((-1, 1), \cdot)$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy} \rightarrow$ grup comutativ

!

Întrebări: 1) Este $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ grup?

2) Dar $([-1, 1], \cdot)$?

$$b) (\mathbb{Z}, +, \cdot); \left(M_n(K), +, \cdot \right); \left(\mathbb{Z}_n, +, \cdot \right)$$

$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{2, 1\}$

$$c) (\mathbb{Q}, +, \cdot); (\mathbb{R}, +, \cdot); (\mathbb{C}, +, \cdot); (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$$

p - număr prim

→ "corpul claselor de resturi modulo p "

12 Structură indusă pe o altă multime („copiere de structură”)

Fie G, H două mulțimi a.î. există:

$f: G \rightarrow H$ o funcție bijectivă;
(deci $|G| = |H|$, cardinale egale).

Fie $(G, \circ)$ o structură algebrică dată (monoid sau grup);

Deoarece f bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1}: H \rightarrow G$ inversa lui f
 $\rightarrow$ „este necesar să o aflăm”.

Atunci $\exists!$ operație binară „ $*$ ” pe H a.î.

$(H, *)$ devine o structură algebrică izomorfă cu $(G, \circ)$

iar $f: G \rightarrow H$ este izomorfism
(bijectivă + morfism)

$f: (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ morfism

$$f(x \circ y) = \underbrace{f(x)}_u * \underbrace{f(y)}_v, \quad \forall x, y \in G$$

$$u * v = f\left(f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)\right), \quad \forall u, v \in H$$

↪ „copierea de structură de la G în H ”

Invers (dacă știm $(H, *)$):

$$x \circ y = f^{-1}\left(f(x) * f(y)\right), \quad \forall x, y \in G$$

↪ „copierea de structură de la H în G ”

Proprietăți: Fie $f: (G, \circ) \rightarrow (H, *)$ morfism (de grupuri sau de monoid)

• Dacă $(G, \circ)$ monoid, $V(G) = \{x \in G \mid x \text{ este simetrizabil}\} \Rightarrow (V(G), \circ)$ este grup,

• Dacă f este morfism de monoid $\Rightarrow$

$$f(x_1 \circ \dots \circ x_n) = f(x_1) * \dots * f(x_n);$$

În particular: $f(\underbrace{x \circ \dots \circ x}_n) = f(x) * \dots * f(x)$, $\forall x_1, \dots, x_n, x \in G$.

• Dacă f este izomorfism de monoizi $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(l_G) &= l_H \\ f(V(G)) &= V(H) \end{aligned}$$

• Dacă f este morfism de grupuri $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(l_G) &= l_H \\ f(x') &= (f(x))' \end{aligned}$$

$\downarrow_{\text{in } G} \quad \quad \quad \uparrow_{\text{in } H}$

Notatie multiplicativă: $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Notatie aditivă: $f(-x) = -f(x), \forall x \in G.$

Example:

① Fie $(\mathbb{R}, +)$ grup și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$
 $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$

f este bijectivă cu $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(u) = \frac{u-b}{a}$ (T.A.)

$\Rightarrow$

f induce pe $\mathbb{R}$ operația „ $*$ ” dată de

$$\begin{aligned} u * v &= f(f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)) \\ &= f\left(\frac{u-b}{a} + \frac{v-b}{a}\right) \\ &= f\left(\frac{u+v-2b}{a}\right) \end{aligned}$$

$$= x \cdot \frac{u+v-2b}{x} + b = u+v-b$$

Deci: $(\mathbb{R}, +) \stackrel{f}{\cong} (\mathbb{R}, *)$, $u * v = u + v - b$

Pb. 193: Se dau grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(\mathbb{R}, *)$, $x * y = x + y + 1$.

Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ este izomorfism
de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(\mathbb{R}, *)$ dacă și numai dacă $a, b = ?$

Soluție: MI: „clasic”

f izomorfism $\iff \begin{cases} f \text{ morfism} & \text{„de grupuri”} \\ f \text{ bijectivă} \end{cases}$

$$f \text{ morfism} \Rightarrow f(x+y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$a(x+y)+b = (ax+b) * (ay+b) \Rightarrow$$

$$a(x+y)+b = ax+b + ay+b + 1 \Rightarrow$$

$$\cancel{a(x+y)} + b = \cancel{a(x+y)} + 2b + 1 \Rightarrow$$

$$b = 2b + 1 \Rightarrow$$

$$-b = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{b = -1} \Rightarrow f(x) = ax - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f \text{ bijectivă} \Rightarrow \boxed{a \in \mathbb{R}^*}, \text{ deci răspuns } \boxed{a \in \mathbb{R}^*, b = -1}.$$

M_{II}: Conform discuției ① $\Rightarrow -b = 1$

$$a \neq 0 \text{ pt. ca să existe } f^{-1}.$$

□

T.A: Pb (200)

② Fie $(H, *) = ([0, \infty), \circ)$ grupul dat.

Fie $f: [-1, 1) \rightarrow [0, \infty)$; $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

$(G, \circ) = ([-1, 1), \circ)$? structura algebrică „copiată”

T.A: Arătați că f este bijectivă și aflați f^{-1} !

Stim că: $(H, *)$ este grup comutativ cu $\begin{cases} e_H = 1 \\ \mu^{-1} = \frac{1}{\mu}, \forall \mu > 0 \end{cases}$

$$\bullet f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [-1, 1), f^{-1}(\mu) = \frac{\mu-1}{\mu+1}$$

Atunci: $\forall x, y \in (-1, 1)$ "Veri Invers..."

$$x \circ y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$$

$$= f^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}\right) = f^{-1}\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)$$

$$= \frac{\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} - 1}{\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1+x+y+xy - 1-x-y+xy}{1-x-y+xy}}{\frac{1+x+y+xy + 1-x-y+xy}{1-x-y+xy}} = \frac{2x+2y}{2+2xy} = \frac{x+y}{1+xy}$$

Deci $\left(\underbrace{(-1, 1)}_G, \circ\right) \xrightarrow{\text{bijectivă}} \left(\underbrace{(0, \infty)}_H, \cdot\right)$, $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in (-1, 1)$.

Pb 681 $\rightarrow$ 683 Se dă grupul $(G, \circ)$, $G = (-1, 1)$ și $x \circ y = \frac{x+y}{1+xy}$

Se cer: (a) elementul neutru $e_G = ?$

(b) $\frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} = ?$

(c) Valoarea $a, b = ?$ a. $\uparrow$. $f: (G, \circ) \rightarrow ((0, \infty), \cdot)$,

$f(x) = \frac{a+x}{b-x}$ să fie izomorfism de grupuri.

Solution:

Observatie: Este recomandat ca în astfel de probleme să începem cu aflarea izomorfismului!

(c) Din discuția (2) de sus $\Rightarrow a = 1, b = 1$.

T.A: "Clasic": din f morfism
 f bijectivă, calcul $\Rightarrow a=1, b=1$

(a) Defi $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ is isomorphism $(G, +) \cong (0, \infty, \cdot)$

$$\Rightarrow f(l_G) = 1 \quad (f(l_G) = l_H)$$

$$l_G = f^{-1}(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

$$b) \text{ Notam } g = \frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$f(g) = f\left(\frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \dots \cdot \frac{1 + \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{6}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{11}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \dots \cdot \frac{11}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{9}}$$

$$= 11 \Rightarrow f(g) = 11 \Rightarrow g = f^{-1}(11) = \frac{11-1}{11+1} = \frac{10}{12}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{10}{12} \Rightarrow \boxed{2 = \frac{5}{6}}$$



T.A: 782 → 787 [Admitere 2018]

Pl. 814 $\rightarrow$ 816 : Pe $\mathbb{C}$ se dă lege de compoziție

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) - 1 + i, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Se cer :

- (a) elementul neutru al legii " $*$ "?
- (b) Multimea elementelor simetrizabile (inversabile) ale monoidului $(\mathbb{C}, *)$?

(c) Dacă $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ atunci

$(\varepsilon + i) * (\varepsilon + i) * \dots * (\varepsilon + i)$ este ?
2022 de ori

Soluție: Se specifică $(\mathbb{C}, *)$ monoid;

Arz trebui să știm: $(\mathbb{C}, \cdot)$ monoid ($\neq 1$) iar
 $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup.

• Observăm că:

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 - i z_1 - i z_2 - 1 + i$$

$$= z_1(z_2 - i) - i(z_2 - i) + i$$

$$= (z_1 - i)(z_2 - i) + i \implies$$

$$z_1 * z_2 - i = (z_1 - i)(z_2 - i) \xrightarrow{\text{sugerează}} \text{să definim}$$

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = z - i,$$

bijectivă cu inversă (Se verifică)
T.A.

$$f^{-1}(z) = z + i$$

$$f(z_1 * z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$$

$$\underbrace{\text{monoidul } (\mathbb{C}, *)}_{(G, *)} \cong \underbrace{\text{monoidul } (\mathbb{C}, \cdot)}_{(H, \cdot)}$$

$$\Rightarrow (a) \quad f(e_G) = e_H \Rightarrow f(e_G) = 1 \Rightarrow e_G = f^{-1}(1) \Rightarrow \boxed{e_G = 1 + i}$$

(b) Doarece f este izomorfism de monizi $\Rightarrow$
 $f(x') = f(x)'$

$$f(V(G, *)) = V(H, *) \text{ și } f^{-1}(V(H, *)) = V(G, *) \Rightarrow$$

$$f^{-1}(\mathbb{C}^*) = V(\mathbb{C}, *)$$

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{C} \setminus \{f^{-1}(0)\} \\ \text{Dar } f^{-1}(0) = i \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{V(\mathbb{C}, *) = \mathbb{C} \setminus i}$$

(c) Fie $g = z + i$; Calculăm

$$f(z) = \underbrace{f(\varepsilon + i) * \dots * (\varepsilon + i)}_{2022}$$

$$= \underbrace{f(\varepsilon + i) \cdot \dots \cdot f(\varepsilon + i)}_{2022}$$

$$= \underbrace{\varepsilon \cdot \dots \cdot \varepsilon}_{2022} = \varepsilon^{2022}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varepsilon^3 = 1 \Rightarrow$$

$$\varepsilon^{2022} = (\varepsilon^3)^{674} = 1 \Rightarrow$$

$$f(z) = 1 \Rightarrow z = f^{-1}(1) = 1 + i \Rightarrow$$

$$\boxed{z = 1 + i}$$