

PERMUTĂRI

- o aranjare a elementelor mulțimii $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$\exists n!$ permutări ale elementelor lui N_n

ex: 4 1 3 5 2 permutare a lui N_5

↖ ↖ ↖ ↖ ↖
↑ ↑

5 moduri 4 moduri ...

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

- o funcție bijectivă : $N_n \rightarrow N_n$

ex. not $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ este funcția.

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 2$$

ARANJAMENTE

- selecție ordonate

ex.: Într-o clasă de 25 elevi, în câte moduri se poate face premierea la sfârșitul anului, dacă se acordă - un premiu I
- un premiu II
- un premiu III

! contează ordinea

I → 25 moduri

II → 24 moduri

III → 23 moduri

Total: $25 \cdot 24 \cdot 23 (\text{moduri}) \stackrel{\text{not}}{=} A_{25}^3$

- funcții injective: $\mathbb{N}/n \rightarrow \mathbb{N}/m$

$f(1) \rightarrow m$ moduri

$f(\underline{2}) \rightarrow m-1$ moduri

...

$f(m) \rightarrow m-(m-1)$ moduri

$$\text{Total: } m(m-1) \dots (m-m+1) = A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!}$$

COMBINĂRI

- selecții neordonate

Exemplu: Dintr-o clasă de 25 elevi, în câte moduri se poate alege o echipă de 3 elevi, pentru a-i trimite într-o excursie?

! nu contează ordinea

($\leftrightarrow$ a extrage o submulțime de 3 elemente)

Sol: din cei 3 selectați anterior (în A_{25}^3 moduri), aceeași echipă de 3 elevi se obține permutându-i între ei în $3!$ moduri

ABC, CAB, BCA, ...

Deci nr cerut este $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} \stackrel{\text{not}}{=} C_{25}^3 \stackrel{\text{not}}{=} \binom{25}{3}$

C_m^n = nr de submultimi de n elemente ale unei multimi de m elemente

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! n!}$$

• funcții strict crescătoare : $\mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{N}_m$

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) \Rightarrow \text{distincte}$$

Alegem valorile pentru $f(1), f(2), \dots, f(n)$ din $\mathbb{N}_m$,
în C_m^n moduri, apoi le aranjăm în ordine crescătoare (unic)

$$\mathbb{N}_4 \rightarrow \mathbb{N}_7$$

- aleg 4 elem din $\mathbb{N}_7$: 5 6 1 3 (C_7^4 moduri)

- ordonare : $\underset{1}{1} \underset{1}{3} 5 6$ (unic)

- atribuire : $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 6$

Alte rezultate,

• nr de funcții : $X_n \rightarrow X'_m : m^n$

$f(1) \rightarrow m$ moduri

$f(2) \rightarrow m$ moduri

:

$f(n) \rightarrow m$ moduri

Total : $\underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n \text{ ori}} = m^n$

• nr de submultimi ale lui $\mathcal{H}_n$: 2^n

$$n=6 \quad S = \{\underline{1}, \underline{3}, \underline{4}\} \iff \text{funcția } f: \underline{N_6} \rightarrow \{\underline{0}, \underline{1}\}$$
$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in S \\ 0, & i \notin S \end{cases}, i = 1, \dots, 6$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \underline{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow f(i) = 1 \text{ pe pozițiile } \underline{1}, \underline{3}, \underline{4} \end{matrix}$$

$$\emptyset \rightarrow 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

① Câte submulțimi ale lui N_8 se pot construi astfel încât :

a) Cel mai mic element al fiecărei submulțimi este 5? ($\approx$ pr. 236)

$$M = \{5, \dots\}$$

↑

? problema se reduce la a construi o submulțime cu elemente din $\{6, 7, 8\}$, lucru care se poate face în 2^3 moduri.

Elementele acestei submulțimi, adăugate la M , vor alcătui o submulțime în care cel mai mic element va fi 5

$$R: 2^3$$

b) Au 4 elemente, îl conțin pe 3 și nu conțin pe 6 și pe 8 ($\approx$ ~~235~~^{pt})

$$\{3, _, _, _ \}$$

3 este în submulțime, deci rămân de ales 3 elemente din mulțimea $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ și acest lucru se poate face în C_5^3 moduri

$$R: C_5^3$$

c) să aibă 3 elemente și să conțină cel puțin un m par. (similar BAC)

Din numărul total de submultimi cu 3 elemente vom scădea numărul de submultimi care nu conțin niciun număr par. Acestea din urmă sunt de fapt submultimi cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7\}$

$$R: C_3^8 - C_3^4$$

d) cel mai mare element este 6 :

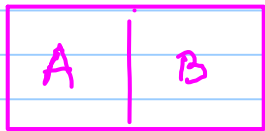
Similar cu a) trebuie construită o submulțime a lui $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ și elementele acesteia se adaugă la mulțimea $M = \{6\}$

$$R: 2^5 \text{ moduri}$$

② În câte moduri se poate scrie N_8 ca reuniune de:

a) două mult. neride disjuncte

Sol. 1



N_8

Problema se reduce la construcția submultimii A (în momentul în care A s-a construit, B va rezulta automat punând în B restul de elemente care nu au fost puse în A)

de ex: $A = \{2, 3, 5\}$ ales $\rightarrow B = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ automat

A se poate construi în $2^8 - 2$ moduri (am scăzut 2 pentru că $\emptyset$ și N_8 nu convin)

$$A = N_8 \Rightarrow B = \emptyset$$

Dacă, aceeași reuniune am numărat-o de două ori :

$A = \{1, 4, 6, 7, 8\}$ ales și $B = \{2, 3, 5\}$ (automat) este aceeași cu cea considerată mai sus

$$R: \frac{2^8 - 2}{2} = 2^7 - 1$$

Sol 2 E. suficient și precizăm submultimea care îl conține pe 1 (restul (direct) elementelor merg automat în cealaltă submultime).

$A = \{1, \dots\}$ - mulțimea care îl conține pe 1 se poate alege în 2^7 moduri

(= nr. de submultimi ale lui $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = M$). Dintre acestea se exclude M , pentru că ar rezulta $A = M \setminus \emptyset$, adică $B = \emptyset$.

$$R: 2^7 - 1$$

b) 7 submultimi nevide, disjuncte

Se observă că reuniunea va conține

- 6 mulțimi cu un element :
- 1 mulțime cu două elemente

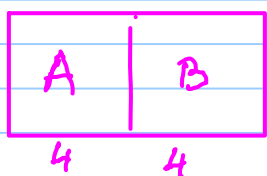
Deci, problema se reduce la construirea multimi cu două elemente, restul elementelor vor forma (automat) singure, multime

ex: $\{3, 5\}$ aleasă $\Rightarrow \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$ automat

R: C_8^2

c) două submultimi disjuncte cu număr egal de elemente (pr 238)

Sol 1:



Din nou, problema se reduce la construcția lui A (B rezultă automat punând restul de 4 elemente care nu au fost puse în A)

A se poate construi în C_8^4 moduri

R: $\frac{C_8^4}{2} = 35$ (ca la a) am numărat dublu, deci trebuie să împărțim cu 2)
 $= C_7^3$

Sol 2: direct C_7^3 : Problema se reduce la construcția acelei submultimi care îl conține pe 1:

$\{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$
Pentru aceasta, trebuie să mai alegem 3 elemente din
 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, ele putând fi alese în C_7^3 moduri.

③ Câte submultimi ale lui N_p :

a) nu conțin nr. divizibile cu 3

$\Rightarrow$ nu conțin pe 3 și nici pe 6

$\Rightarrow$ conțin doar pe 1, 2, 4, 5, 7, 8 sau nimic ($\emptyset$)

Deci va trebui să alegem o submulțime a lui $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ și acest lucru se poate face în 2^6 moduri.

Obs: ϕ este numărată în aceste submultimi pentru că ϕ îndeplinește condiția din enunț.

b) contin doar numere mediiizibile cu 3

$\Leftrightarrow$ continue doar pe 1, 2, 4, 5, 7, 8

R: $2^6 - 1$ (aici ϕ se exclude pentru că nu îndeplinește cerința din enunț)

c) conține cel puțin un nr. divizibil cu 3

Sol 1: Numărăm:

- submultimi care contin pe 3 dar nu pe 6 : $2^6 \setminus \{3, \dots\}$

- submultime care contin pe 6 dar nu pe 3 : 2^6
- " " " " pe 3 si pe 6 : 2^6

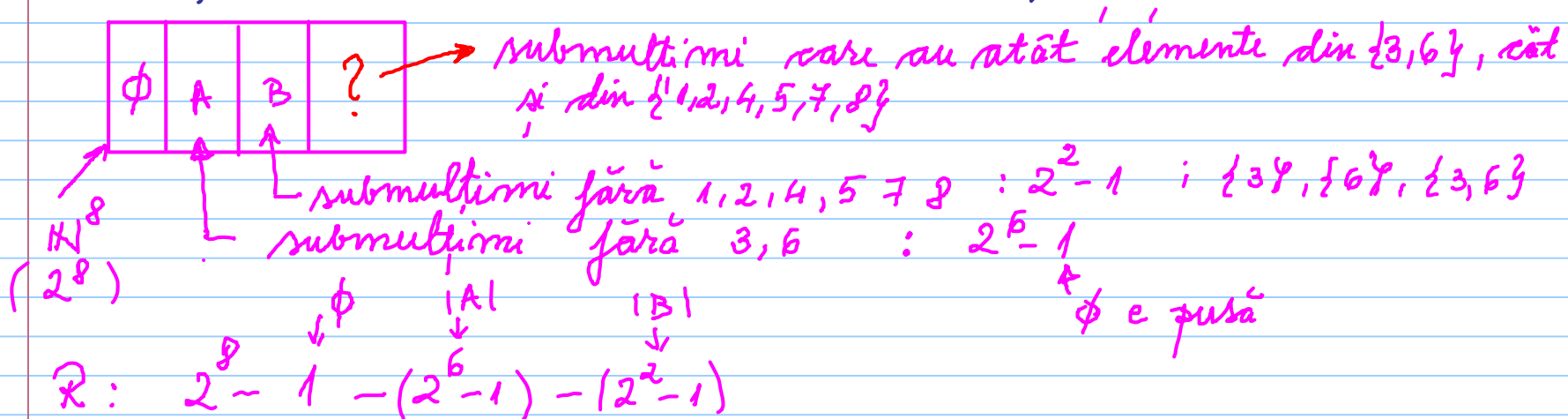
elemente din submulțimi ale lui M

$$\text{Total} \cdot 3 \cdot 2^6 = 192$$

Sol 2 : Din totalul submultimilor lui N_8 le scoatem pe acelea care contin numere divizibile cu 3 (3 sau 6). Acelea din urma vor fi de fapt submultimi ale lui $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

$$R: 2^8 - 2^6 = 2^6(2^2 - 1) = 2^6 \cdot 3$$

d) Contine atat numere divizibile cu 3, cat si numere nedivizibile cu 3



e) conțin cel puțin un element mai mic ca 5 (< 5)

Din totalul submultimilor le excludem pe acelea care nu conțin elemente < 5 ,
adică vor conține elemente din $\{5, 6, 7, 8\}$

$$R: 2^8 - 2^4$$



nr. submultimilor lui $\{5, 6, 7, 8\}$

Probabilități

A - eveniment

$$P(A) = \frac{\text{nr. cazurilor favorabile realizării lui } A}{\text{nr. cazurilor posibile (nr. total de cazuri)}}$$

!! ATENȚIE: dacă se folosește această definiție, cazurile pe care le numărăm trebuie să fie egal probabile, adică să aibă loc cu aceeași probabilitate

Exemplu: La aruncarea unui zar, evenimentele A_i , $i=1, \dots, 6$

A_i : "pică fața i "

sunt egal probabile, $P(A_i) = \frac{1}{6}$, $i=1, \dots, 6$

① O familie intenționează să aibă 3 copii. Care este probabilitatea să aibă două fete și un băiat, dacă la fiecare naștere sunt șanse egale să fie fată, respectiv băiat?

F : "copilul este fată"

B : "copilul este băiat"

$$P(F) = P(B) = \frac{1}{2}$$

Sol 1 (gresită!!) ar fi să considerăm cazurile posibile

- 3 băieți
- 2 fete și un băiat
- un băiat și două fete
- 3 fete

Probabilitatea (gresită) ar fi $\frac{1}{4}$

Sol2 (corectă) : sunt 8 cazuri posibile ! egal probabile !

FFF	• BFF
• FFB	BFB
• FBF	BBF
FBB	BBB

Fiecare din aceste cazuri are probabilitatea $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

Favorabile : 3 cazuri •

$$R : \frac{3}{8}$$

② Dacă în problema precedentă se consideră că
 $P(F) = 0.48 = p$ și $P(B) = 0.52 = q$,

!! In acest caz cele 8 evenimente posibile nu mai sunt egal probabile, de exemplu

$$P(\text{"FFF"}) = p^3$$

$$P(\text{"BBB"}) = q^3$$

} diferite!

In acest caz,

$$P(\text{"familia are 2 fete si un baietel"}) = P(\text{FFB}) + P(\text{FBF}) + P(\text{BFF}) = 3 p^2 q$$

$p^2 q \quad p^2 q \quad p^2 q$

③ Fie $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ si $\mathcal{F} = \{f: A \rightarrow A\}$. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare o funcție din $\mathcal{F}$, aceasta să fie:

a) impară

b) pară

Sol: $|A| = 5^5$ nr total de funcții

a) prem numărul de funcții impare

f impară dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$

$x=0$: $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, deci $f(0)$ poate fi doar 0

! Observăm că: dacă $f(a)$ este precizat, atunci $f(-a)$ rezultă automat (va fi $-f(a)$).

Prin urmare, problema se reduce la alegerea lui $f(1)$ și $f(3)$
($f(-1)$ și $f(-3)$ vor rezulta automat)

$f(1)$ se poate alege în 5 moduri (fiecare din elementele lui A poate fi ales)

$f(3)$ -1- 5 -1-

Deci nr funcții impare = $5 \cdot 5$

$$\mathbb{R}: \quad P(\text{"f impară"}) = \frac{5^2}{5^5} = \frac{1}{5^3}$$

b) f pară $f(x) = f(-x)$

$f(0)$ se poate alege în 5 moduri

$$f(1) \quad -1 \quad 5$$

$$f(3) \quad -1 \quad 5$$

$$f(-1) \quad -1 \quad 1 \text{ mod: va fi automat } f(1)$$

$$f(-3) \quad 1 \text{ mod: } f(3)$$

nr funcții pare: 5^3

$$P(\text{"f pară"}) = \frac{5^3}{5^5} = \frac{1}{5^2}$$