Pregătire admitere 2025

Conf.univ.dr. Adela NOVAC

PRIMITIVE

Definiţia 1. *Fie $g : I \to \mathbb{R}$, I-interval. Funcţia g admite primitive pe I dacă există $G : I \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

1. *G este derivabilă pe I;*
2. *$G'(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.*

Problema 1. (i) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sin(a+x)\sin(b+x)}$, $0 < a < b < 2$.

(ii) Calculaţi integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx$, $0 < a < b < 2$. (problema 497/Ed. 2025)

Rezolvare. (i)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx &= \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin(b-a)}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx \\
&= \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin((b+x)-(x+a))}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx \\
&= \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin(b+x)\cos(a+x)-\sin(a+x)\cos(b+x)}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx \\
&= \frac{1}{\sin(b-a)}\int \left(\frac{\cos(a+x)}{\sin(a+x)}-\frac{\cos(b+x)}{\sin(b+x)}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sin(b-a)}\left(\ln|\sin(a+x)|-\ln|\sin(b+x)|\right)+C
\end{aligned}$$

Deoarece $a+x<b+x<3<\pi \Longrightarrow \sin(a+x)>0, \sin(b+x)>0$. Prin urmare

$$\int \frac{1}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx = \frac{1}{\sin(b-a)}\ln\frac{\sin(a+x)}{\sin(b+x)}+C, C\in\mathbb{R}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\,dx &= \frac{1}{\sin(b-a)}\ln\frac{\sin(a+x)}{\sin(b+x)}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{\sin(b-a)}\ln\frac{\sin(a+1)\sin b}{\sin(b+1)\sin a}.
\end{aligned}$$

Observaţie. *O variantă a acestei probleme a fost dată la Simularea Examenului de Admitere în 2022 (Problema 860/Ediţia 2025).*

□

Problema 2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{4\pi}\frac{dx}{5+4\cos x}$. (Problema 467/Ediţia 2025)

Rezolvare.

$$I=\int_0^{4\pi}\frac{dx}{5+4\cos x}=2\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+4\cos x}=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{5+4\cos x}=4\int_0^{\pi}\frac{dx}{5+4\cos x}$$

Pentru aceste egalităţi am aplicat periodicitatea funcţiei cos, proprietatea

$$\int_x^{x+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

unde f este o funcţie periodică de perioadă T, şi de asemenea proprietatea funcţiilor pare pe un interval $[-a, a]$.

Fie $F(x)$ o primitivă a funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$, deci $F(x) = \displaystyle\int \dfrac{dx}{5+4\cos x}$.

Facem substituţia $t = \tan\frac{x}{2} \implies x = 2\arctan t$. Prin diferenţiere obţinem că $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Ştim din formule trigonometrice că $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$F(t) = \int \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{t^2+9}dt = \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3} \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{2}{3}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}, \text{ pentru } x \in [0, \pi).$$

$$F(x) = \begin{cases} \mathcal{C} & , x = \pi \\ \frac{2}{3}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{3} & , x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Deoarece F este continuă pe $[0, \pi]$ rezultă că

$$\mathcal{C} = \lim_{x\searrow\pi} \frac{2}{3}\text{arctg}\,\frac{\tan\frac{x}{2}}{3} = \frac{2}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3},$$

deci,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & , x = \pi \\ \frac{2}{3}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{3} & , x \in [0, \pi) \end{cases}.$$

Revenind la integrala iniţială, avem că $I = 4\left(F(\pi) - F(0)\right) = 4\left(\dfrac{\pi}{3} - 0\right) = \dfrac{4\pi}{3}$.

$\square$

Problema 3. (i) Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx$, $x \in [0, +\infty)$.

(ii) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx$. (Problema 693/Ediţia 2024 - Simulare 2017).

Rezolvare. (i) Considerăm F, o primitivă a funcţiei $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$.

$$F(x) = \int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx = \int \frac{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}{x^2(\frac{1}{x^2}+1+x^2)}dx.$$

Vom face substituţia $t = x - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Prin diferenţiere avem $dt = (1+\dfrac{1}{x^2})dx$, iar dacă ridicăm la pătrat obţinem $t^2 = x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}$, deci putem considera

$$F(t) = \int \frac{dt}{t^2+3}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{t}{\sqrt{3}},$$
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}, x \in (0,+\infty).$$

Pentru intervalul $x \in [0,+\infty]$, avem:

$$F(x) = \begin{cases} \mathcal{C} & , x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} & , x > 0 \end{cases}.$$

Deoarece F este continuă pe $[0,+\infty]$ rezultă că

$$\mathcal{C} = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x^2-1}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } (-\infty) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Deci,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} & , x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg } \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}} & , x > 0 \end{cases}.$$

Observaţie. *(a) O primitivă a funcţiei $f(x)$ se poate calcula utilizînd metoda* *standard astfel:*

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} &= \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}\\
&= \frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-x+1)+(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right],
\end{aligned}$$

deci

$$G(x)=\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right);x\in\mathbb{R}.$$

(ii) Avem:

$$I=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}dx=F(1)-F(0)=0-\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

sau,

$$I=G(1)-G(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$\square$

Problema 4. Fie $f_n:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{x(x^n+1)}$, $I_n=\int f_n(x)\,dx$.

(i) Să se calculeze I_3.

(ii) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_1^2 f_n(x)dx$. (Problema 947/Ediţia 2025, Admitere 2023)

(iii) Dacă $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcţiei f_n al cărei grafic trece prin punctul $A(1,0)$, atunci soluţia inecuaţiei $|\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)|\leq 1$ este ... (Problema 494/Ediţia 2025).

Rezolvare. (i)

$$I_3 = \int \frac{1}{x(x^3+1)}dx = \int \frac{x^2}{x^3(x^3+1)}dx.$$

Fie F_3 o primitivă pentru $f_3(x) = \dfrac{1}{x(x^3+1)}$. Facem substituţia $x^3 = t$. Prin diferenţiere avem că $3x^2dx = dt$, deci,

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{3}\ln\frac{t}{t+1}, \\ F_3(x) &= \frac{1}{3}\ln\frac{x^3}{x^3+1}, \\ I_3 &= \frac{1}{3}\ln\frac{x^3}{x^3+1} + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(ii) Fie $F_n(x)$ o primitivă pentru $f_n(x)$. Atunci,

$$F_n(x) = \int \frac{1}{x(x^n+1)}dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+1)}dx$$

Facem substituţia $x^n = t$ şi prin diferenţiere rezultă $nx^{n-1}dx = dt$. Atunci,

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\int \frac{1}{t(t+1)}dt = \frac{1}{n}\int \frac{t+1-t}{t(t+1)}dx = \frac{1}{n}\ln\frac{t}{t+1}, \text{ prin urmare,}$$
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\ln\frac{x^n}{x^n+1}.$$

(O altă metodă este să facem substituţia $\dfrac{1}{x} = t$.) Calculăm

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\int_1^2 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n}\ln\frac{x^n}{x^n+1}\Big|_1^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}[\ln\frac{2^n}{2^n+1} - \ln\frac{1}{2}] \\ &= \ln 1 + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

(iii) $$\left.\begin{array}{c} F_n(x) = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{x^n}{x^n+1} + C \\ F(1) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{n}\ln\frac{1}{2} + C = 0 \Longrightarrow C = \frac{\ln 2}{n}.$$

$F_n(x) = \frac{1}{2}\frac{2x^n}{x^n+1}$, $x \in (0, \infty)$.

Ştim că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \\ \infty, & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$.

- Dacă $x = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{2}{2} = 0 \Longrightarrow x \in I_1 = 0$.
- Dacă $x > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{2x^n}{x^n(1+\frac{1}{x^n})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln 2}{n} = 0 \Longrightarrow$ $x \in I_2 = (1, \infty)$.
- Dacă $0 < x < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{2x^n}{x^n+1} =$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln 2 + \frac{1}{n}\ln x^n - \frac{1}{n}\ln(x^n+1)\right) = 0 + \ln x - 0 = \ln x$.
  $|\lim\limits_{x\to\infty} F_n(x)| \le 1 \Longleftrightarrow |\ln x| \le 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{e} \le x \le e$. Dar $x \in (0,1)$ deci $x \in I_3 = \left[\frac{1}{e}, 1\right)$.

Soluţia se află reunind intervalele aflate în fiecare caz, deci $x \in I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [\frac{1}{e}, \infty)$.

□

Problema 5. (i) Să se calculeze $\int \frac{x - x^2}{(x^2+1)(x^3+1)}dx$, $x \in [0, +\infty]$.

(ii) Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{x-x^2}{(x^2+1)(x^3+1)}dx$. (Admitere 2019, Problema 772/Ediţia 2025).

Rezolvare. (i) Avem

$$\begin{aligned}\frac{x-x^2}{(x^2+1)(x^3+1)} &= \frac{(x+x^4)-(x^4+x^2)}{(x^2+1)(x^3+1)}\\ &= \frac{x(1+x^3)-x^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^3+1)}\\ &= \frac{x}{x^2+1}-\frac{x^2}{x^3+1}\end{aligned}$$

deci,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{x^2}{x^3+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + \mathcal{C}\\ &= \frac{1}{6}\ln(x^2+1)^3(x^3+1)^{-2} + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n\to\infty} F(n) - F(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\ln\frac{(n^2+1)^3}{(n^3+1)^2}\\ &= \frac{1}{6}\ln \lim_{n\to\infty}\frac{n^6+3n^4+3n^2+1}{n^6+2n^3+1}\\ &= \frac{1}{6}\ln 1 = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Observaţie. *O generalizare a integralei de la (i) este următoarea:*

Fie $a, b \geq 1$ şi $x \in [0, +\infty]$; avem

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{(x^a+1)(x^b+1)}dx &= \int \frac{(x^{b-1} + x^{a+b-1}) - (x^{a+b-1} + x^{a-1})}{(x^a+1)(x^b+1)}dx \\ &= \int \frac{x^{b-1}}{x^b+1}dx - \int \frac{x^{a-1}}{x^a+1}dx \\ &= \frac{1}{b}\ln(x^b+1) - \frac{1}{a}\ln(x^a+1) + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{ab}\ln\frac{(x^b+1)^a}{(x^a+1)^b} + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Problema 6. (i) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi pară. Să se arate că

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x - \frac{1}{x})\, dx = \int_0^{n-\frac{1}{n}} f(u)\, du,$$

$n > 1$.

(ii) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-|x-\frac{1}{x}|}dx$. (Admitere 2021, Problema 827/ Ediţia 2025).

Rezolvare. (i) $I = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x - \frac{1}{x})\, dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x - \frac{1}{x})\, dx + \int_1^n f(x - \frac{1}{x})\, dx.$

Pentru primul termen din suma integralelor vom face substituţia $x = \frac{1}{t} \Longrightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Pentru $x = \frac{1}{n} \Longrightarrow t = n$ iar pentru $x = 1 \Longrightarrow t = 1$.

$I = -\int_n^1 f(\frac{1}{t} - t)\frac{1}{t^2}\, dt + \int_1^n f(x - \frac{1}{x})\, dx = \int_1^n f(\frac{1}{x} - x)\frac{1}{x^2}\, dx + \int_1^n f(x - \frac{1}{x})\, dx.$

Având în vedere că funcţia f este pară deducem că $f(\frac{1}{x} - x) = f(x - \frac{1}{x})$.

$I = \int_1^n \left(f(\frac{1}{x} - x)\frac{1}{x^2} + f(x - \frac{1}{x})\right)\, dx = \int_1^n (1 + \frac{1}{x^2}) f(x - \frac{1}{x})\, dx.$

Notăm $x - \frac{1}{x} = u \Longrightarrow (1 + \frac{1}{x^2})dx = du$. Pentru $x = 1 \Longrightarrow u = 0$ iar pentru $x = n \Longrightarrow u = n - \frac{1}{n}$.

Deci, $I = \int_0^{n-\frac{1}{n}} f(u)\, du$, $n > 1$, $u > 0$.

(ii) Fie $f(u) = e^{-|u|}, u > 0$. Se observă că funcţia este pară. Atunci conform (i) avem că

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-|x-\frac{1}{x}|}dx = \int_{0}^{n-\frac{1}{n}} e^{-u}\,du = -e^{-u}\Big|_0^{n-\frac{1}{n}} = 1 - e^{\frac{1}{n}-n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-|x-\frac{1}{x}|}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{n-\frac{1}{n}} e^{-|u|}\,du = \lim_{n\to\infty}(1 - e^{\frac{1}{n}-n}) = 1.$$

□

Problema 7. *Să se calculeze* $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$. *(Admitere 2022, Problema 859/Ediţia 2025)*

Rezolvare. Se face substituţia $t = 2 - x$. De aici, prin diferenţiere avem $dt = -dx$. Pentru $x = 0 \Longrightarrow t = 2$ iar pentru $x = 2 \Longrightarrow t = 0$.

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx = -\int_2^0 \frac{\sqrt{2-t}}{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}}\sin\frac{\pi(2-t)}{2}\,dt.$$

Evaluăm expresia $\sin\frac{\pi(2-t)}{2} = \sin(\pi - \frac{\pi t}{2}) = \sin\pi\cos(\frac{\pi t}{2}) - \sin(\frac{\pi t}{2})\cos\pi = \sin\frac{\pi t}{2}$ şi înlocuim în integrală.

$$I = \int_0^2 \frac{\sqrt{2-t}}{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}}\sin\frac{\pi t}{2}\,dt = \int_0^2 \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}\sin\frac{\pi x}{2}\,dt.$$

$$2I = I+I = \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\sin\frac{\pi x}{2}\,dx+\int_0^2 \frac{\sqrt{(2-x)}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}\sin\frac{\pi x}{2}\,dt = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{2}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi}.$$

Deci $I = \frac{2}{\pi}$. □

Observaţie. *Aceeaşi idee se foloseşte şi pentru rezolvarea Problemei 446/Ediţia 2025.*

Problema 8. *Să se calculeze* $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{9^x+3}\,dx$. *(Problema 916/Ediţia 2025, Simulare 2023)*

Rezolvare. Se face substituţia $t = 1 - x$. De aici, prin diferenţiere avem $dt = -dx$. Pentru $x = 0 \Longrightarrow t = 1$ iar pentru $x = 1 \Longrightarrow t = 0$.

$$I=\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{9^x+3}\,dx=-\int_1^0 \frac{\sin(\pi(1-t))}{9^{1-t}+3}\,dt.$$

Evaluăm expresia

$$\sin(\pi(1-t))=\sin(\pi-\pi t)=\sin\pi\cos(\pi t)-\sin(\pi t)\cos\pi=\sin(\pi t)$$

şi înlocuim în integrală.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\frac{9}{9^t}+3}\,dt=\int_0^1 9^t\frac{\sin(\pi t)}{9+3\cdot 9^t}\,dt=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{9^t\sin(\pi t)}{9^t+3}\,dt\\&=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{(9^t+3)\sin(\pi t)}{9^t+3}-\frac{3\sin(\pi t)}{9^t+3}\right)dt=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\sin(\pi t)-\frac{3\sin(\pi t)}{9^t+3}\right)dt\\&=\frac{1}{3}\frac{(-\cos(\pi t))}{\pi}\bigg|_0^1-I=\frac{2}{3\pi}-I.\end{aligned}$$

Avem că $2I=\dfrac{2}{3\pi}$, deci $I=\dfrac{1}{3\pi}$. $\square$

Problema 9. *(i) Să se calculeze* $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1+x^3}}dx$, *$x\in(0,+\infty)$.*

(ii) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1+x^3}}dx$, *$x\in(0,+\infty)$ (Problema 662/Ediţia 2025).*

Rezolvare. (i) Fie F o primitivă pentru f, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x^3}}$, $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Vom face substituţia $x^{\frac{3}{2}}=t$. Prin diferenţiere obţinem $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx=dt$. Înlocuind, se obţine:

$$\begin{aligned}F(t)&=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+t^2}\\&=\frac{2}{3}\ln(t+\sqrt{1+t^2})+\mathcal{C}.\end{aligned}$$

Revenind la integrala iniţială, avem că $F(x)=\dfrac{2}{3}\ln(x\sqrt{x}+\sqrt{1+x^3})+\mathcal{C}$.

(ii) $I=F(1)-F(0)=\dfrac{2}{3}\ln(1+\sqrt{2})$.

$\square$

Problema 10. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{n\pi} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx$. *(Problema 917/Ediţia 2025).*

Rezolvare. $\sin^2(x+\pi) = (\sin x\cos\pi + \sin\pi\cos x)^2 = \sin^2 x$.

Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}$ fiind periodică de perioadă π avem că

$$\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx = n\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

Deci, $\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^{n\pi} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx = \dfrac{1}{n\pi}n\int_0^{\pi} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx = \dfrac{1}{n}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx.$

$I = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\pi} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx.$

Cum funcţia f este o funcţie pară avem că $I = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2+\sin^2(x)}\,dx$

Fie F o primitivă pentru f.

Facem substituţia $\tan x = t \implies x = \arctan t$. $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \implies \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

$$F(t) = \int \frac{1}{2+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{3+t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{2}} + \mathcal{C}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C},\ \text{pentru } x \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

$$F(x) = \begin{cases} \mathcal{C} & , x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C} & , x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

Deoarece F este continuă pe $[0, \frac{\pi}{2})$ rezultă că

$$\mathcal{C} = \lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{6}}\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\pi}{2} + \mathcal{C},$$

deci,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{6}} & , x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan \frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{2}} + \mathcal{C} & , x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

Revenind la limita cerută, avem că

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} \frac{1}{2+\sin^2(x)}\, dx &= \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin^2(x)}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} F(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[F(\frac{\pi}{2}) - F(0)\right] \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

$\square$

Problema 11. *Să se calculeze* $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{(x^2+1)(x^7+1)}\, dx$. *(Problema 773/Ediţia 2025).*

Rezolvare. Facem substituţia $x = \dfrac{1}{t} \Longrightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}\, dt$.

Pentru $x = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow t = n$.

Pentru $x = n \Longrightarrow t = \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} I = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{(x^2+1)(x^7+1)}\, dx &= \int_{n}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^7})} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{t^7}{(t^2+1)(t^7+1)}\, dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2I = I + I &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{(x^2+1)(x^7+1)}\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{x^7}{(x^2+1)(x^7+1)}\, dx = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\, dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+x^7}{(x^2+1)(x^7+1)}\, dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{x^2+1}\, dx. \\ &= \arctan x\Big|_{\frac{1}{n}}^{n} = \arctan n - \arctan\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$\square$