Calcul Integral

2025

1 Funcţii integrabile

Problema 1.1 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{8}\arcsin\frac{k}{n}.$$

Rezolvare: Definim şirul

$$a_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{8}\arcsin\frac{k}{n}.$$

Acest şir se poate scrie sub forma

$$a_n=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{2n}\right)^2\arcsin\frac{k}{2n}.$$

Funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\arcsin x$ este o funcţie continuă. Dacă se consideră diviziunea echidistantă

$$\Delta_n: 0<\frac{1}{2n}<\ldots\frac{k}{2n}<\frac{k+1}{2n}<\ldots\frac{2n}{2n}=1$$

şi punctele intermediare

$$\xi=\left\{\frac{1}{2n},\ldots,\frac{k}{2n},\ldots,\frac{2n}{2n}\right\}$$

atunci şirul a_n se va scrie ca o sumă Riemann a funcţiei f

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{2n}-\frac{k-1}{2n}\right)f\left(\frac{k}{2n}\right).$$

Ţinând cont de faptul că

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

ajungem la

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx.$$

Pentru a calcula integrala

$$I = \int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx$$

facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ şi obţinem

$$I = \int_0^1 x^2 \arcsin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \left(\frac{\sin^3 t}{3} \right)' dt =$$

$$= t \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (1 - \cos^2 t) \, dt = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)' (1 - \cos^2 t) \, dt =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.$$

În final,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}.$$

Problema 1.2 *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2 + k + 1}}.$$

Rezolvare: Este verificată inegalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{2n^2 + n + 1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (k+1)^2}} \le a_n \le \frac{1}{n\sqrt{2}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$$

Sumele

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

şi

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (k+1)^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

sunt sumele Riemann ale aceleiaşi funcţii

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

relative la diviziunea

$$\Delta_n : 0 < \frac{1}{n} < \ldots < \frac{n}{n}$$

cu mulţimea punctelor intermediare

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$$

şi

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}.$$

Obţinem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(1+\sqrt{2}).$$

2 Calculul unor integrale definite

Problema 2.1 *Să se calculeze*

$$I = \int_{-1}^{1} (1+2x^{2025})e^{-|x|}\,dx.$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} (1+2x^{2025})e^{-|x|}\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{e^{-|x|}}_{\text{pară}}\,dx + 2\int_{-1}^{1} \underbrace{x^{2025}e^{-|x|}}_{\text{impară}}\,dx = \\ &= 2\int_0^1 e^{-|x|}\,dx = 2\int_0^1 e^{-x}\,dx = -2e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = -2e^{-1} + 2e^0 = 2 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Problema 2.2 *Să se calculeze*

$$I = \int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(a+x)^{n+1}}\,dx,\ a > 0.$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(a+x)^{n+1}}\,dx = \int_0^a \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{n-1} \frac{1}{(a+x)^2}\,dx = \\ &= \frac{-1}{2a}\int_0^a \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a+x}\right)'dx = \frac{-1}{2an}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^n\Big|_0^a = \frac{1}{2na}. \end{aligned}$$

Problema 2.3 *Să se calculeze valoarea integralei*

$$I = \int_0^1 \{nx\}^k\,dx,\ n \in \mathbb{N}^*,\ k \geq 0$$

unde $\{\cdot\}$ *reprezintă partea fracţionară.*

Rezolvare: Ne vom folosi de următorul rezultat: " dacă f este o fuţie periodică cu perioada $T > 0$,

$$f(x) = f(x+T)$$

atunci $g(x) = f(ax)$, $a > 0$ este o funcţie periodică cu perioada $\frac{T}{a}$

$$g(x) = f(ax) = f(ax+T) = f\big(a\big(x+\frac{T}{a}\big)\big) = g\big(x+\frac{T}{a}\big)."$$

Funcţia parte fracţionară, $\{\cdot\}$, are perioada 1 şi deducem că funcţia $\{n\cdot\}^k$ are perioada $\frac{1}{n}$. Obţinem

$$I = \int_0^1 \{nx\}^k\,dx = \int_0^{0+n\frac{1}{n}} \{nx\}^k\,dx = n\int_0^{\frac{1}{n}} \{nx\}^k\,dx.$$

Ţinând cont de faptul că

$$x \in [0,1) \Rightarrow nx \in [0,1) \Rightarrow \{nx\} = nx$$

ajungem la

$$I = n\int_0^{\frac{1}{n}} (nx)^k\,dx = n^{k+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^k\,dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}x^{k+1}\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{k+1}.$$

Problema 2.4 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *o funcţie periodică de perioadă* $T > 0$. *Să se arate că* f *are primitivele funcţii periodice dacă şi numai dacă*

$$\int_0^T f(x)\,dx = 0.$$

Se presupune că f *este integrabilă pe orice interval închis şi mărginit.*

Rezolvare: Deoarece două primitive diferă între ele printr-o constantă este suficient să considerăm primitiva

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Dacă F este periodică atunci $F(x+T) = F(x)\,\forall\, x \in \mathbb{R}$. Considerând $x = 0$ ajungem la $F(T) = F(0)$. Mai mult, $F(0) = 0$ şi obţinem

$$F(T) = \int_0^T f(x)\,dx = 0.$$

Invers,

$$F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

Folosind faptul că

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = 0$$

obţinem

$$F(x+T) = \int_0^x f(t)\,dt = F(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.5 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$f(x) = \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}.$$

Să se determine valoarea $c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f + c$ are o primitivă periodică.

Rezolvare: Funcţia $f + c$ este o funcţie periodică de perioadă $T = \pi$. Obţinem

$$\int_0^\pi (f(x) + c)\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx + c\pi = 0.$$

Se ajunge la

$$c = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx.$$

Mai mult,

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\,dx.$$

Folosind cele de mai sus avem

$$c = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\, dx.$$

În final,

$$c = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}\, dx = -\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Problema 2.6 *Să se calculeze limita şirului*

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{1 + n^2 \arcsin^2(\sin x)}\, dx.$$

Rezolvare: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ funcţia

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 \arcsin^2(\sin x)}$$

este o funcţie pară, periodică de perioadă $T = \pi$. Se observă că şirul a_n poate fi scris sub forma

$$a_n = \int_0^{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right] + \alpha_n} f_n(x)\, dx,$$

unde $[\cdot]$ reprezintă funcţia parte întreagă şi

$$\alpha_n = n - \pi\left[\frac{n}{\pi}\right],\ \alpha_n \in (0, \pi).$$

Mai mult, folosind periodicitatea funcţiei f_n obţinem

$$a_n = \int_0^{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\, dx + \underbrace{\int_{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]}^{\alpha_n + \pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\, dx}_{b_n =} = \left[\frac{n}{\pi}\right]\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx + b_n =$$

$$= \left[\frac{n}{\pi}\right]\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + n^2 x^2}\, dx + b_n = 2\left[\frac{n}{\pi}\right]\frac{1}{n}\mathrm{arctg}\frac{n\pi}{2} + b_n =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\pi}\right\}\right)\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{n}\pi}{2} + b_n,$$

unde am definit

$$b_n = \int_{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]}^{\alpha_n + \pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\, dx.$$

Deoarece $\alpha_n \in (0,\pi)$ şi $f_n(x) > 0$ avem

$$0 < b_n < \int_{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]}^{\pi+\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\,dx = \frac{2}{n}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{n}\pi}{2} < \frac{\pi}{n}.$$

Acest şir de inegalităţi conduce la

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

În final,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{n}\pi}{2} - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left\{\frac{n}{\pi}\right\}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{n}\pi}{2} - \lim_{n\to\infty} b_n = \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} - 0 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Problema 2.7 *Să se calculeze limita şirului*

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\,dx.$$

Rezolvare: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ funcţia

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2\cos^2 x}$$

este o funcţie pară şi periodică de perioadă π. Legat de şirul a_n obţinem

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^n f_n(x)\,dx = \int_0^{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\,dx + \underbrace{\int_{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]}^{\alpha_n+\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\,dx}_{b_n=} = \\ &= \left[\frac{n}{\pi}\right]\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx + b_n = \left[\frac{n}{\pi}\right]\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx + b_n = \\ &= 2\left[\frac{n}{\pi}\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx + b_n,\end{aligned}$$

unde am definit

$$b_n = \int_{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]}^{\alpha_n+\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\,dx \text{ şi } \alpha_n = n - \pi\left[\frac{n}{\pi}\right] \in (0,\pi).$$

O primitivă a funcţiei f_n pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tgx}}{\sqrt{1+n^2}}, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2\sqrt{1+n^2}}, \ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

şi deducem că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2\sqrt{1+n^2}}.$$

Mai mult, şirul de inegalităţi

$$0 < b_n < \int_{\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]}^{\pi+\pi\left[\frac{n}{\pi}\right]} f_n(x)\, dx < \frac{\pi}{\sqrt{1+n^2}}$$

implică

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

În final,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\left[\frac{n}{\pi}\right] \frac{\pi}{2\sqrt{n^2+1}} = 1.$$