MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Sesiuni de pregătire la matematică

Aplicaţii ale Calculului Diferenţial şi Integral

Conf.univ.dr. Adela Capătă

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

12 Aprilie 2025

Problema 1. (Culegere 743) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

Se cere mulţimea valorilor lui a pentru care graficele funcţiilor f şi g au tangentă comună într-un punct comun.

Problema 1. (Culegere 743) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

Se cere mulţimea valorilor lui *a* pentru care graficele funcţiilor *f* şi *g* au tangentă comună într-un punct comun. **Soluţie:**

Problema 1. (Culegere 743) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

Se cere mulţimea valorilor lui a pentru care graficele funcţiilor f şi g au tangentă comună într-un punct comun. **Soluţie:**
Folosim condiţia de tangenţă a graficelor funcţiilor f şi g în punctul de abscisă x_0:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Problema 1. (Culegere 743) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

Se cere mulţimea valorilor lui a pentru care graficele funcţiilor f şi g au tangentă comună într-un punct comun. **Soluţie:**

Folosim condiţia de tangenţă a graficelor funcţiilor f şi g în punctul de abscisă x_0:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Problema 1. (Culegere 743) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

Se cere mulţimea valorilor lui a pentru care graficele funcţiilor f şi g au tangentă comună într-un punct comun. **Soluţie:**
Folosim condiţia de tangenţă a graficelor funcţiilor f şi g în punctul de abscisă x_0:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Astfel avem:

$$\begin{cases} ax_0{}^2 + x_0 = \ln(1 + x_0) \\ 2ax_0 + 1 = \dfrac{1}{1 + x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0{}^2 + x_0 = \ln(1 + x_0) \\ (2ax_0 + 1)(1 + x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(ax_0 + 1) = \ln(1 + x_0) \\ x_0(2ax_0 + 2a + 1) = 0. \end{cases}$$

Problema 1. (Culegere 743) Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţiile $f, g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = ax^2 + x \text{ şi } g(x) = \ln(1 + x).$$

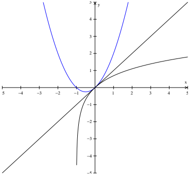
Se cere mulţimea valorilor lui a pentru care graficele funcţiilor f şi g au tangentă comună într-un punct comun. **Soluţie:**
Folosim condiţia de tangenţă a graficelor funcţiilor f şi g în punctul de abscisă x_0:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Astfel avem:

$$\begin{cases} ax_0{}^2 + x_0 = \ln(1 + x_0) \\ 2ax_0 + 1 = \dfrac{1}{1 + x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0{}^2 + x_0 = \ln(1 + x_0) \\ (2ax_0 + 1)(1 + x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(ax_0 + 1) = \ln(1 + x_0) \\ x_0(2ax_0 + 2a + 1) = 0. \end{cases}$$

Observăm că $x_0 = 0$ conduce la obţinerea unor identităţi adevărate pentru orice



$a \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $a \in \mathbb{R}$. Răspuns E

Problema 2. (Culegere 696) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Problema 2. (Culegere 696) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Soluţie:

Problema 2. (Culegere 696) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Soluţie:

Deoarece graficul funcţiei f este tangent axei Ox avem $f(x_0) = 0$ şi $f'(x_0) = 0$.

Problema 2. (Culegere 696) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Soluţie:

Deoarece graficul funcţiei f este tangent axei Ox avem $f(x_0) = 0$ şi $f'(x_0) = 0$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} {x_0}^3 + ax_0 = 0 \\ 3{x_0}^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_0}^3 + ax_0 = 0 \\ a = -3{x_0}^2, \end{cases}$$

ce ne conduce la soluţia $(x_0 = 0, a = 0)$. Răspuns D.

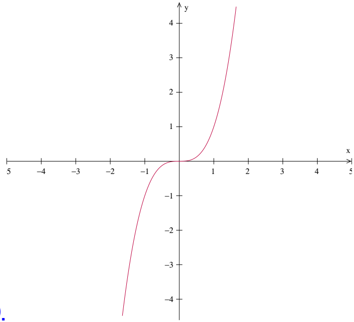
Problema 2. (Culegere 696) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Soluţie:

Deoarece graficul funcţiei f este tangent axei Ox avem $f(x_0) = 0$ şi $f'(x_0) = 0$.

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} {x_0}^3 + ax_0 = 0 \\ 3{x_0}^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_0}^3 + ax_0 = 0 \\ a = -3{x_0}^2, \end{cases}$$



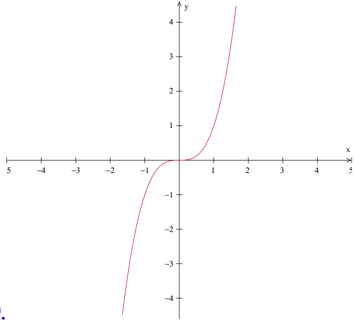
ce ne conduce la soluţia $(x_0 = 0, a = 0)$. Răspuns D.

Problema 2. (Culegere 696) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real. Determinaţi valoarea parametrului a astfel încât graficul funcţiei f să fie tangent axei Ox.

Soluţie:

Deoarece graficul funcţiei f este tangent axei Ox avem $f(x_0) = 0$ şi $f'(x_0) = 0$. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} {x_0}^3 + ax_0 = 0 \\ 3{x_0}^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {x_0}^3 + ax_0 = 0 \\ a = -3{x_0}^2, \end{cases}$$



ce ne conduce la soluţia $(x_0 = 0, a = 0)$. Răspuns D.

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$.

(Culegere 354) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$.

(Culegere 354) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$.

(Culegere 354) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, f(x_0))$ ce aparţine graficului funcţiei f este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$.
(Culegere 354) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:
Soluţie:
Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, f(x_0))$ ce aparţine graficului funcţiei f este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Determinăm coordonatele punctului în care graficul funcţiei intersectează axa Oy. Astfel $x_0 = 0$, iar $f(0) = 1$ şi $M(0, 1)$.

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$.

(Culegere 354) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, f(x_0))$ ce aparţine graficului funcţiei f este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Determinăm coordonatele punctului în care graficul funcţiei intersectează axa Oy.
Astfel $x_0 = 0$, iar $f(0) = 1$ şi $M(0, 1)$.
Derivata funcţiei, adică

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2 - x + 1)^2},$$

ne conduce la $f'(0) = 4$.

Problema 3. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2 - x + 1}$.

(Culegere 354) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, f(x_0))$ ce aparţine graficului funcţiei f este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Determinăm coordonatele punctului în care graficul funcţiei intersectează axa Oy.
Astfel $x_0 = 0$, iar $f(0) = 1$ şi $M(0, 1)$.
Derivata funcţiei, adică

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x^2 - x + 1)^2},$$

ne conduce la $f'(0) = 4$.
Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul $M(0, 1)$ este:

$$y - 1 = 4x \Longleftrightarrow y - 4x - 1 = 0.$$

$y - 4x - 1 = 0$. Răspuns C

(Culegere 355) Ecuaţia normalei la graficul funcţiei *f* în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa *Oy* este:

(Culegere 355) Ecuaţia normalei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

(Culegere 355) Ecuaţia normalei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

Deoarece tangenta şi normala sunt drepte perpendiculare, avem $f'(0) \cdot m_N = -1$, de unde

$$m_N = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{4}.$$

(Culegere 355) Ecuaţia normalei la graficul funcţiei f în punctul în care graficul funcţiei intersectează axa Oy este:

Soluţie:

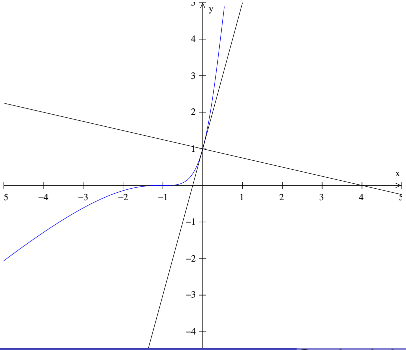
Deoarece tangenta şi normala sunt drepte perpendiculare, avem $f'(0) \cdot m_N = -1$, de unde

$$m_N = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{4}.$$

Ecuaţia normalei în punctul $M(0, 1)$ este

$$y - 1 = m_N \cdot x \Longleftrightarrow y + \frac{1}{4}x - 1 = 0.$$

Răspuns D



Problema 4. Să se determine limita următoarelor şiruri:

(i) $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$;

(ii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$, $x \in (-1, 1)$.

Soluţie:

Soluţie:
(i) Pentru orice $k = \overline{2, n}$ considerăm funcţia $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \ln(\ln x), \forall x \in [k, k+1].$$

Soluţie:
(i) Pentru orice $k = \overline{2, n}$ considerăm funcţia $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \ln(\ln x), \forall x \in [k, k+1].$$

Observăm că f verifică ipoteza Teoremei lui Lagrange şi există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1-k} = f'(c_k),$$

adică

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c_k \ln(c_k)}.$$

Soluţie:
(i) Pentru orice $k = \overline{2, n}$ considerăm funcţia $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \ln(\ln x), \ \forall x \in [k, k+1].$$

Observăm că f verifică ipoteza Teoremei lui Lagrange şi există $c_k \in (k, k+1)$ astfel încât

$$\frac{f(k+1) - f(k)}{k+1-k} = f'(c_k),$$

adică

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{c_k \ln(c_k)}.$$

Deoarece $c_k \in (k, k+1)$ are loc dubla inegalitate:

$$k \ln(k) < c_k \ln(c_k) < (k+1) \ln(k+1),$$

iar

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{c_k \ln(c_k)} < \frac{1}{k \ln(k)}.$$

Aşadar,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k\ln(k)}, \forall k = \overline{2, n}.$$

Aşadar,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k\ln(k)}, \forall k = \overline{2, n}.$$

Însumând după $k = \overline{2, n}$ obţinem:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < f(n+1) - f(2) < \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}}_{a_n}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \Big(f(n+1) - f(2)\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)\Big) = \infty,$$

din ultima parte a inegalităţii duble de mai sus avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

(ii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Dar,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} kx^k &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n \\ &= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}) \\ &= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n)' \\ &= x \cdot \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' \\ &= x \cdot \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \cdot \left(1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n\right).\end{aligned}$$

(ii) $a_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Dar,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kx^k &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n \\
&= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}) \\
&= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n)' \\
&= x \cdot \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)' \\
&= x \cdot \frac{-(n+1)x^n(1 - x) + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} \\
&= \frac{x}{(1 - x)^2} \cdot \left(1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n\right).
\end{aligned}$$

Cum $\lim_{n\to\infty} nx^{n+1} = 0$ şi $\lim_{n\to\infty} (n+1)x^n = 0$, $\forall x \in (-1, 1)$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{x}{(1 - x)^2}.$$

Problema 5. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x^2 + x + m)$, unde m este un parametru real.
(Culegere 668) f este monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Problema 5. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x^2 + x + m)$, unde m este un parametru real.
(Culegere 668) f este monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
Soluţie:

Problema 5. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x^2 + x + m)$, unde m este un parametru real.
(Culegere 668) f este monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
Soluţie:
Determinăm

$$f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 4x + 2m + 1).$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ conduce la

$$2x^2 + 4x + 2m + 1 = 0.$$

Pentru ca f să fie monotonă discriminatul ecuaţiei verifică

Problema 5. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x^2 + x + m)$, unde m este un parametru real.
(Culegere 668) f este monotonă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.
Soluţie:
Determinăm
$$f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 4x + 2m + 1).$$
Ecuaţia $f'(x) = 0$ conduce la
$$2x^2 + 4x + 2m + 1 = 0.$$
Pentru ca f să fie monotonă discriminatul ecuaţiei verifică
$$\Delta \leq 0,$$
adică
$$8 - 16m \leq 0,$$
ce conduce la $m \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Răspuns E

(Culegere 669) f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

(Culegere 669) f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Soluţie:

(Culegere 669) f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii: $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.

Soluţie:

Pentru a avea două puncte de extrem, ecuaţia

$$f'(x) = 0$$

(Culegere 669) f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii: $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.
Soluţie:
Pentru a avea două puncte de extrem, ecuaţia

$$f'(x) = 0$$

trebuie să admită două rădăcini reale şi distincte.

Astfel $\Delta > 0$

(Culegere 669) f are două puncte de extrem dacă şi numai dacă m aparţine mulţimii: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Soluţie:

Pentru a avea două puncte de extrem, ecuaţia

$$f'(x) = 0$$

trebuie să admită două rădăcini reale şi distincte.

Astfel $\Delta > 0$ asigură că $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. Răspuns A

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:

Funcţia $g(x) = |x(x^2 - 3)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:

Funcţia $g(x) = |x(x^2 - 3)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Observând că $g(-x) = g(x)$, este suficient a determina punctele de extrem pe $[0, \infty)$.

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:

Funcţia $g(x) = |x(x^2 - 3)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Observând că $g(-x) = g(x)$, este suficient a determina punctele de extrem pe $[0, \infty)$.

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \in (0, \sqrt{3}] \\ x^3 - 3x, & x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:

Funcţia $g(x) = |x(x^2 - 3)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Observând că $g(-x) = g(x)$, este suficient a determina punctele de extrem pe $[0, \infty)$.

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \in (0, \sqrt{3}] \\ x^3 - 3x, & x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Calculăm derivata funcţiei g :

$$g'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3, & x \in (0, \sqrt{3}) \\ 3x^2 - 3, & x \in (\sqrt{3}, \infty), \end{cases}$$

iar ecuaţia $g'(x) = 0$

Problema 6 (Culegere 697) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, a este un parametru real. Pentru $a = -3$, numărul punctelor de extrem local ale funcţiei $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$ este: 5. Răspuns E

Soluţie:

Funcţia $g(x) = |x(x^2 - 3)|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Observând că $g(-x) = g(x)$, este suficient a determina punctele de extrem pe $[0, \infty)$.

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \in (0, \sqrt{3}] \\ x^3 - 3x, & x \in (\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$$

Calculăm derivata funcţiei g :

$$g'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3, & x \in (0, \sqrt{3}) \\ 3x^2 - 3, & x \in (\sqrt{3}, \infty), \end{cases}$$

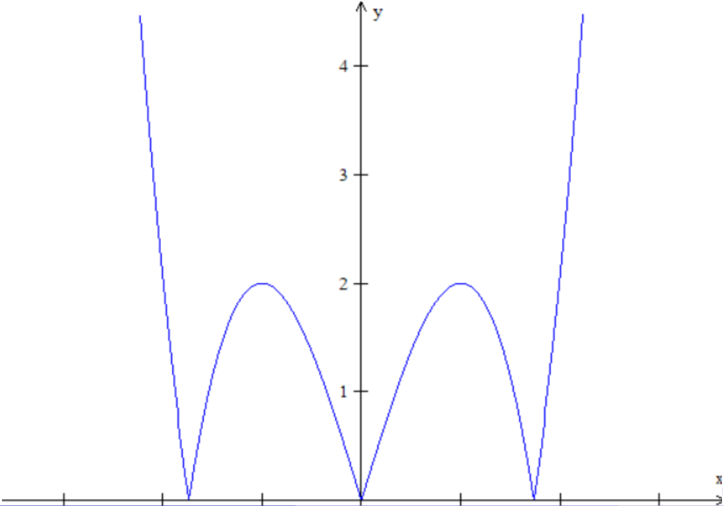
iar ecuaţia $g'(x) = 0$ ne conduce la rădăcinile $-1 \notin [0, \infty)$ şi $1 \in [0, \infty)$.

Pentru determinarea numărului punctelor de extrem folosim tabelul de variaţie şi simetria graficului funcţiei fată de axa Oy:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\vert_{3}$	$+++$	0	$---$	${}^{-6}\vert_{+6}$		$+++$
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pentru determinarea numărului punctelor de extrem folosim tabelul de variaţie şi simetria graficului funcţiei fată de axa Oy:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\vert_3$	$+++$	0	$---$	$^{-6}\vert_{+6}$	$+++$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Problema 7. (Culegere 484) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(a) = \int_0^1 |x - a| dx$ are valoarea minimă $\frac{1}{4}$.

Problema 7. (Culegere 484) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(a) = \int_0^1 |x - a| dx$ are valoarea minimă $\frac{1}{4}$.

Soluţie:

Problema 7. (Culegere 484) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(a) = \int_0^1 |x-a| dx$ are valoarea minimă $\frac{1}{4}$.

Soluţie:

Deoarece $x \in [0,1]$, distingem următoarele situaţii:

- pentru $a \leq 0$, atunci $|x-a| = x-a$.
- pentru $a \geq 1$, atunci $|x-a| = a-x$.
- pentru $a \in (0,1)$ avem:

$$|x-a| = \begin{cases} a-x, & \text{dacă } x \geq a \\ x-a, & \text{dacă } a \geq x. \end{cases}$$

$$f(a) = \begin{cases} \int_0^1 (x-a)dx = \frac{1}{2} - a & \text{dacă } a \leq 0 \\ \int_0^a (a-x)dx + \int_a^1 (x-a)dx = a^2 - a + \frac{1}{2} & \text{dacă } a \in (0,1) \\ \int_0^1 (a-x)dx = a - \frac{1}{2} & \text{dacă } a \geq 1. \end{cases}$$

$$f'(a) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } a \leq 0 \\ 2a-1 & \text{dacă } a \in (0,1) \\ 1 & \text{dacă } a \geq 1. \end{cases}$$

Ecuaţia $f'(a) = 0$ admite o unică soluţie $a = \dfrac{1}{2}$, iar tabelul de variaţie corespunzător funcţiei f este:

a	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	1		$+\infty$
$f'(a)$	- - -	- - -	- - -	0	+++		+++
$f(a)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$,

iar $\dfrac{1}{4}$ reprezintă valoarea minimă a funcţiei. Răspuns B.

Problema 8. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12 = 0.$$

Problema 8. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12 = 0.$$

Soluţie:

Problema 8. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12 = 0.$$

Soluţie:
Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, $c_1 < c_2$ două rădăcini reale consecutive ale derivatei şi $f(c_1)f(c_2) < 0$, atunci există un unic $\alpha \in (c_1, c_2)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$.

Problema 8. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12 = 0.$$

Soluţie:

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, $c_1 < c_2$ două rădăcini reale consecutive ale derivatei şi $f(c_1)f(c_2) < 0$, atunci există un unic $\alpha \in (c_1, c_2)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$.

(Şirul lui Rolle) Fiind dată funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ rădăcini reale ale derivatei f', atunci numerele

$$\lim_{x \to \inf I} f(x),\ f(c_1),\ f(c_2),\ \cdots,\ f(c_n),\ \lim_{x \to \sup I} f(x)$$

în această ordine formează şirul lui Rolle.

Problema 8. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei:

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12 = 0.$$

Soluţie:

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I, $c_1 < c_2$ două rădăcini reale consecutive ale derivatei şi $f(c_1)f(c_2) < 0$, atunci există un unic $\alpha \in (c_1, c_2)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$.

(Şirul lui Rolle) Fiind dată funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ rădăcini reale ale derivatei f', atunci numerele

$$\lim_{x\to\inf I} f(x),\ f(c_1),\ f(c_2),\ \cdots,\ f(c_n),\ \lim_{x\to\sup I} f(x)$$

în această ordine formează şirul lui Rolle.

Numărul variaţiilor de semn din şirul lui Rolle este egal cu numărul rădăcinilor reale ale funcţiei f.

Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 12.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$, anume

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$$

ne conduce la rădăcinile $c_1 = -2$, $c_2 = -1$ şi $c_3 = 1$. Cum

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

şirul lui Rolle ataşat funcţiei f este:

x	-∞	-2	-1	1	$+\infty$
şirul lui Rolle	$+\infty$	20	25	-7	$+\infty$

Prin urmare ecuaţia admite două rădăcini reale $x_1 \in (-1, 1)$ şi $x_2 \in (1, +\infty)$.

Problema 9. (Culegere 503) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1}\,dx.$$

Problema 9. (Culegere 503) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1}\,dx.$$

Soluţie:

Problema 9. (Culegere 503) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1} dx.$$

Soluţie:

Teorema de medie. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Problema 9. (Culegere 503) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1}dx.$$

Soluţie:

Teorema de medie. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Folosind teorema de medie de mai sus, avem existenţa unui punct $c_n \in (n, n+3)$ astfel încât

$$\int_n^{n+3} \frac{x^3}{x^6+1}dx = (n+3-n)\cdot\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} = 3\cdot\frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1}.$$

Deoarece

$$\frac{n^3}{(n+3)^6+1} \le \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} \le \frac{(n+3)^3}{n^6+1},$$

folosind teorema cleştelui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^6}{(n+3)^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3(n+3)^3}{n^6+1},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} = 3.$$ Răspuns E

folosind teorema cleştelui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^6}{(n+3)^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3(n+3)^3}{n^6+1},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} = 3.$$ Răspuns E

Problema 10. (Culegere 509) Determinaţi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx.$$

folosind teorema cleştelui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^6}{(n+3)^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{c_n{}^3}{c_n{}^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3(n+3)^3}{n^6+1},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{c_n{}^3}{c_n{}^6+1} = 3.$$ Răspuns E

Problema 10. (Culegere 509) Determinaţi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx.$$

Soluţie:

folosind teorema cleştelui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^6}{(n+3)^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3(n+3)^3}{n^6+1},$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty} 3n^3 \cdot \frac{{c_n}^3}{{c_n}^6+1} = 3. \text{ Răspuns E}$$

Problema 10. (Culegere 509) Determinaţi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx.$$

Soluţie:
Din teorema de medie avem existenţa unui punct $c \in (t, 2t)$ astfel încât

$$\int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = (2t-t) \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c}.$$

Întrucât $c \in (t, 2t)$ şi $t \to 0$, $c \to 0$ şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+c)}{c} \cdot \frac{c}{\sin c} = 1.$$

Răspuns C

Întrucât $c \in (t, 2t)$ şi $t \to 0$, $c \to 0$ şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+c)}{c} \cdot \frac{c}{\sin c} = 1.$$

Răspuns C

Problema 11. (Culegere 511) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}.$$

Întrucât $c \in (t, 2t)$ şi $t \to 0$, $c \to 0$ şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+c)}{c} \cdot \frac{c}{\sin c} = 1.$$

Răspuns C

Problema 11. (Culegere 511) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}.$$

Soluţie:

Întrucât $c \in (t, 2t)$ şi $t \to 0$, $c \to 0$ şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+c)}{c} \cdot \frac{c}{\sin c} = 1.$$

Răspuns C

Problema 11. (Culegere 511) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}.$$

Soluţie:

Aplicăm teorema de medie. Astfel există $c_n \in (n, n+1)$ cu proprietatea că:

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}} = (n+1-n) \cdot \frac{1}{\sqrt{{c_n}^3+c_n+1}} = \frac{1}{\sqrt{{c_n}^3+c_n+1}}.$$

Întrucât $c \in (t, 2t)$ şi $t \to 0$, $c \to 0$ şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_t^{2t} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} dx = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t \cdot \frac{\ln(1+c)}{\sin c} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+c)}{c} \cdot \frac{c}{\sin c} = 1.$$

Răspuns C

Problema 11. (Culegere 511) Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}}.$$

Soluţie:

Aplicăm teorema de medie. Astfel există $c_n \in (n, n+1)$ cu proprietatea că:

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}} = (n+1-n) \cdot \frac{1}{\sqrt{c_n{}^3+c_n+1}} = \frac{1}{\sqrt{c_n{}^3+c_n+1}}.$$

Trecând la limită cu $n \to \infty$ avem $c_n \to \infty$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{c_n{}^3+c_n+1}} = 0.$$ Răspuns B

Problema 12. (Culegere 528) Determinaţi $\lim_{t \to 0} \int_{2^t}^{3^t} \frac{x}{\ln x} dx$.

Problema 12. (Culegere 528) Determinaţi $\lim_{t\to 0}\int_{2^t}^{3^t}\frac{x}{\ln x}dx$.

Soluţie:

Problema 12. (Culegere 528) Determinaţi $\lim_{t\to 0}\int_{2^t}^{3^t}\frac{x}{\ln x}dx$.

Soluţie:

Cu notaţia $x = e^y$, $y = \ln x$ şi integrala devine $\int_{t\ln 2}^{t\ln 3}\frac{e^{2y}}{y}dy$.

Folosim acum: Teorema de medie-II.

Problema 12. (Culegere 528) Determinaţi $\lim_{t \to 0} \int_{2^t}^{3^t} \frac{x}{\ln x} dx$.

Soluţie:

Cu notaţia $x = e^y$, $y = \ln x$ şi integrala devine $\int_{t \ln 2}^{t \ln 3} \frac{e^{2y}}{y} dy$.

Folosim acum: Teorema de medie-II. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, $g(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Problema 12. (Culegere 528) Determinaţi $\lim_{t\to 0}\int_{2^t}^{3^t}\frac{x}{\ln x}dx$.

Soluţie:

Cu notaţia $x = e^y$, $y = \ln x$ şi integrala devine $\int_{t\ln 2}^{t\ln 3}\frac{e^{2y}}{y}dy$.

Folosim acum: Teorema de medie-II. Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, $g(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Avem că există $c \in (t\ln 2, t\ln 3)$ astfel încât

$$\int_{t\ln 2}^{t\ln 3}\frac{e^{2y}}{y}dy = e^{2c}\int_{t\ln 2}^{t\ln 3}\frac{1}{y}dy = e^{2c}\ln y\Big|_{t\ln 2}^{t\ln 3} = e^{2c}\ln\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Prin urmare,

$$\lim_{t\to 0}\int_{2^t}^{3^t}\frac{x}{\ln x}dx = \lim_{t\to 0} e^{2c}\ln\frac{\ln 3}{\ln 2} = \ln\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$ Răspuns C

Problema 13. (Culegere 505) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^3} dt$. Atunci $F'(2)$ este:

$4e^{64}$.

Problema 13. (Culegere 505) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^3}\, dt$. Atunci $F'(2)$ este: $4e^{64}$.

Soluţie:

Problema 13. (Culegere 505) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^3} dt$. Atunci $F'(2)$ este: $4e^{64}$.

Soluţie:

Deoarece funcţia $g(x) = e^{x^3}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g. Atunci

Problema 13. (Culegere 505) Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^{x^2} e^{t^3}dt$. Atunci $F'(2)$ este: $4e^{64}$.

Soluţie:

Deoarece funcţia $g(x)=e^{x^3}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive. Fie $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g. Atunci

$$\int_0^x g(t)dt = G(x)-G(0),$$

Problema 13. (Culegere 505) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^3} dt$. Atunci $F'(2)$ este: $4e^{64}$.

Soluţie:

Deoarece funcţia $g(x) = e^{x^3}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g. Atunci

$$\int_0^x g(t)dt = G(x) - G(0),$$

iar

$$F(x) = G(x^2) - G(0).$$

Problema 13. (Culegere 505) Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^3} dt$. Atunci $F'(2)$ este: $4e^{64}$.

Soluţie:

Deoarece funcţia $g(x) = e^{x^3}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive. Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g. Atunci

$$\int_0^x g(t)dt = G(x) - G(0),$$

iar

$$F(x) = G(x^2) - G(0).$$

Prin derivare avem

$$F'(x) = 2xG'(x^2) = 2xg(x^2) = 2xe^{x^6},$$

de unde

$$F'(2) = 4e^{64}.$$

Răspuns A

Problema 14. (Culegere 513) Aflaţi aria cuprinsă între axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = \pi$ şi graficul funcţiei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

Problema 14. (Culegere 513) Aflaţi aria cuprinsă între axa Ox, dreptele $x = 0$ şi $x = \pi$ şi graficul funcţiei $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}.$$

Soluţie:
Aria căutată este:

$$A = \int_0^\pi |f(x)| dx = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Folosind notaţia $y = \pi - x$, avem $x = \pi - y$ şi

$$A = \int_0^\pi \frac{(\pi - y) \sin(\pi - y)}{1 + \cos^2(\pi - y)} dy = \int_0^\pi \frac{(\pi - y) \sin y}{1 + \cos^2 y} dy = \int_0^\pi \frac{\pi \sin y}{1 + \cos^2 y} dy - \int_0^\pi \frac{y \sin y}{1 + \cos^2 y}$$

Astfel

$$2A = -\pi \int_0^\pi \frac{(\cos y)'}{1 + \cos^2 y} dx = -\pi \arctan(\cos y)\Big|_0^\pi = -\pi(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{2},$$

de unde $A = \frac{\pi^2}{4}$. Răspuns C


Fii la curent cu noutățile
Urmărește-ne pe Instagram și poți vedea
- Informații legate de admitere
- Conținut dedicat studenților și viitorilor studenți: informații despre cursuri, evenimente, oportunități de carieră, viața de student și multe altele!
AC.UTCLUJ.RO


Completează formularul de participare
Doar dacă nu l-ai completat anterior!